الامتياز
فى
الرياضيات
جبر و هندسة
الصف
الثالث
الاعدادى
2019
إعداد
ا/عبدالمقصود حنفى
ت/ ٠١٠٦٧٣٣٣٦٣١٥
www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة
الترم الثانى

الجبر

حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين

أولاً

حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانياً

(١) أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانيا

① س + ص = ٥ ، س - ص = ١

الحل

ص = ٥ - س

س	١	٢	٣
ص	٤	٣	٢

ص = س - ١

س	١	٢	٣
ص	٠	١	٢

م.ح = {(٣ ، ٢)}

المستقيمان متقاطعان — عدد الحلول حل وحيد

② ص - ٢س = -٣ ، ص = س - ١

الحل

ص = ٢س - ٣

س	١	٢	٣
ص	-١	١	٣

ص = س - ١

س	١	٢	٣
ص	٠	١	٢

م.ح = {(٢ ، ١)}

③ ص = ٢س - ٣ ، س + ٢ص = ٤

الحل

ص = ٢س - ٣

س	١	٢	٣
ص	-١	١	٣

س = ٤ - ٢ص

س	٤	٢	٠
ص	٠	١	٢

م.ح = {(٢ ، ١)}

④ ٣ س + ص = ٣ ، ٢ ص + ٦ س = ٦

الحل

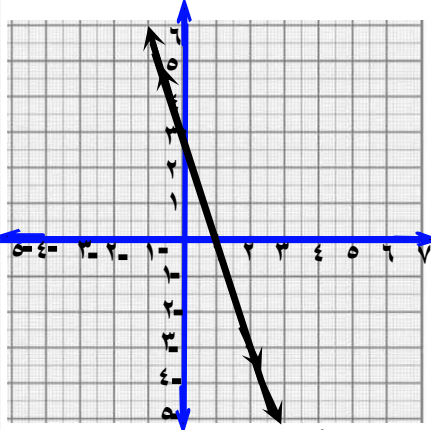
ص = ٣ - ٣س

س	٠	١	٢
ص	٣	٠	-٣

٢ص = ٦ - ٦س ÷ ٢

ص = ٣ - ٣س

س	٠	١	٢
ص	٣	٠	-٣

م.ح = {(س ، ص) : ٣س + ص = ٣}

المستقيمان منطبقان

عدد الحلول = عدد لا نهائى

⑤ ص = س - ١ ، ص - س = ٣

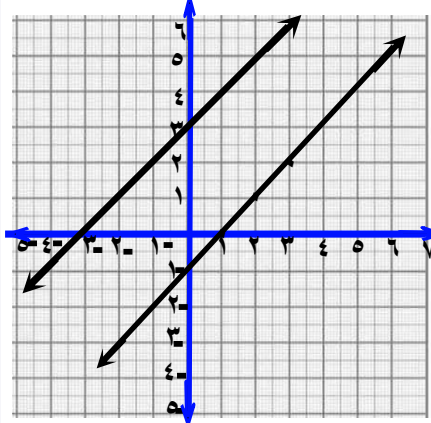
الحل

ص = س - ١

س	١	٢	٣
ص	٠	١	٢

ص = س + ٣

س	٠	١	٢
ص	٣	٤	٥

م.ح = ∅

المستقيمان متوازيان

عدد الحلول = صفر

ملاحظات

المستقيمان الممثلان للمعادلتين

$أ_1 س + ب_1 ص = ج_1$ ، $أ_2 س + ب_2 ص = ج_2$

يكونان

① **منطبقان** إذا كان $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{ج_1}{ج_2}$

② **متوازيان** إذا كان $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} \neq \frac{ج_1}{ج_2}$

③ **متقاطعان** إذا كان $\frac{أ_1}{أ_2} \neq \frac{ب_1}{ب_2} \neq \frac{ج_1}{ج_2}$

ثانياً

حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبرياً

توجد طريقتان للحل **الجبرى**

(١) طريقة التعويض (٢) طريقة الحذف

(١) أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً

① ٢ س + ص = ٥ ، س - ص = ١

الحل

طريقة الحذف

٢ س + ص = ٥
س - ص = ١
٣ س = ٦ ÷٣
س = ٢

بالتعويض فى الأولى

٢×(٢) + ص = ٥
٤ + ص = ٥
ص = ٥ - ٤
ص = ١

م.ح = { (٢ ، ١) }

طريقة التعويض

٢س + ص = ٥
ص = ٥ - ٢ س
بالتعويض فى
س - ص = ١
س - (٥ - ٢س) = ١
س - ٥ + ٢س = ١
٣س = ١ + ٥
٣س = ٦ ÷٣
س = ٢
ص = ٥ - ٤
ص = ١

م.ح = { (٢ ، ١) }

② س + ص = ٥ ، س - ص = ١

الحل

س - ص = ١
س + ص = ٥
٢س = ٦ ÷ ٢
س = ٣

بالتعويض فى الأولى

٣ + ص = ٥
ص = ٥ - ٣
ص = ٢

م.ح = { (٣ ، ٢) }

③ ٤ س + ٣ص = ٦ ، س - ٢ص = ٧

الحل

٤س + ٣ص = ٦ ← ×٢
س - ٢ص = ٧ ← ×٣
٨ س + ٦ص = ١٢
٣ س - ٦ص = ٢١
١١ س = ٣٣ ÷١١
س = ٣

بالتعويض فى الأولى

١٢+ ٣ص = ٦
٣ص = ٦-١٢
٣ص = -٦ ÷٣
ص = -٢

∴ م . ح = { (٣ ،-٢) }

④ س + ٢ ص = ٨ ، ٢س + ص = ٧

الحل

س + ٢ ص = ٨ ← ×٢
٢س + ص = ٧ ← ×١
٢س + ٤ ص = ١٦
٢س + ص = ٧ (-)
٣ ص = ٩ ÷٣
ص = ٣

بالتعويض فى الأولى

س + ٢ × ٣ = ٨
س = ٨ -٦
س = ٢

م.ح = { (٢ ، ٣) }

⑤ ص = ١ ، س + ٢ص - ٧ = ٠

الحل

بالتعويض فى الثانية

س + ٢ × ١ - ٧ = ٠
س - ٥ = ٠
س = ٥

م.ح = { (٥ ، ١) }

تمارين ١

١ أكمل كلاً مما يأتى

① المستقيمان س = ٤ ، ص−٣ = ٠ يتقاطعان فى النقطة ......

② نقطة تقاطع المستقيمين س = −١ ، ص+١ = ٠ تقع فى الربع ..

③ مجموعة حل المعادلتين س + ٣ص = ٤ ، ٣ص + س = ١ هى ..

④ مجموعة حل المعادلتين ٤س + ص = ٦ ، ٨س + ٢ص = ١٢ هى ..

⑤ إذا كان المستقيمان: س + ٣ص = ٤ ، س + ٩ص = ٧ متوازيين فإن ٩ = ...

⑥ المستقيمان : س + ٥ ص = ١ ، س + ٥ص − ٨ = ٠ يكونان ..

⑦ المستقيمان :٣س +٤ص = ١ ، ٦س + ٨ص = ٢ يكونان ......

⑧ عدد حلول المعادلتين س+ص = ٢ ، س + ص −٣ = ٠ هو...

⑨ إذا كان للمعادلتين س +٤ص = ٧ ، ٣س +ك ص = ٢١ عدد لانهائى من الحلول فإن ك = ...

⑩ إذا كان للمعادلتين : س +٢ص = ١ ، ٢س +ك ص = ٢ حل وحيد فإن ك لا يمكن أن تساوى ....

⑪ مجموعة حل المعادلتين ص = س + ٤ ، س + ص = ٤ هى

⑫ مجموعة حل المعادلتين س + ص = ٠ ، ص − ٥ = ٠ هى

===================================

٢ أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانياً

① س + ص = ٤ ، ٢س − ص = −١

② ٣س +ص = ٣ ، ص = س − ١

③ س + ص = ٥ ، س − ص = ١

④ س + ص = ٤ ، ص = س + ٤

⑤ ٣س + ص = ٤ ، ٢ص +٦س = ٢

⑥ س + ٢ص = ٣ ، ٣س + ٦ص = ٩

===================================

٣ أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً

① س +ص = ٧ ، س − ص = ١

② س − ص = ٤ ، ٣س + ٢ص = ٧

③ ٢س − ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤

④ ٣س − ص + ٩ = ٠ ، ص − ٢س − ٧ = ٠

⑤ س + ص = ١ ، س + ص = ٥

⑥ ٣س + ٢ص = ٤ ، س − ٣ص = ٥

⑦ س + ص = ٧ ، ٢س − ٣ص = −١

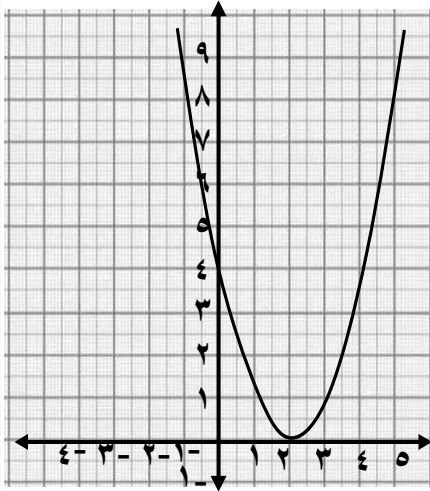
⑧ **أوجد** قيمتى ٩ ، ب علماً بأن (٣ ، −١) حل للمعادلتين ٩س + ب ص − ٥ = ٠ ، ٣ ٩س + ب ص = ١٧

حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانياً

١ مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية ومن الرسم استنتج إحداثى رأس المنحنى و معادلة محور التماثل و القيمة العظمى أو الصغرى للدالة و مجموعة حل المعادلة د(س) = صفر

① د(س) = (س − ٢)^{2} حيث س ∈ [−١ ، ٥]

الحل

س	٥	٤	٣	٢	١	٠	−١
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

رأس المنحنى (٢، ٠)

معادلة محور التماثل س = ٢

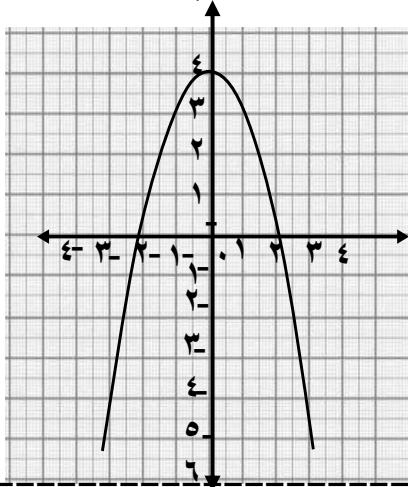
القيمة الصغرى عند ص = ٠

م.ح = { ٢ }

===================================

② د(س) = ٤ − س^{2} حيث س ∈ [−٣ ، ٣]

الحل

س	٣	٢	١	٠	−١	−٢	−٣
ص	−٥	٠	٣	٤	٣	٠	−٥

رأس المنحنى (٠ ، ٤)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة العظمى عند ص = ٤

م.ح = {٢ ، −٢}

===================================

لاحظ أن

مجموعة حل المعادلة هى نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات و إذا لم يقطع المنحنى محور السينات يكون م.ح = ∅

حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد جبريا ً باستخدام القانون العام

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية

$ا س^2 + ب س + جـ = 0$

القانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 ا جـ}}{2 ا}$$

==========

(1) أوجد مجموعة حل المعادلة باستخدام القانون العام

① $س^2 - 4 س + 2 = 0$

الحل

$ا = 1$ ، $ب = -4$ ، $جـ = 2$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 ا جـ}}{2 ا}$$

$$س = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$$

$$س = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$س = 2 \pm \sqrt{2}$$

$س = 2 + \sqrt{2}$ ، $س = 2 - \sqrt{2}$

م.ح = { 3,4 ، 0,6 }

==========

② $س^2 = 2 س + 2$ حيث $\sqrt{3} = 1,7$

الحل

$س^2 - 2 س - 2 = 0$

$ا = 1$ ، $ب = -2$ ، $جـ = -2$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 ا جـ}}{2 ا}$$

$$س = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times -2}}{2 \times 1}$$

$$س = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$س = \frac{2 + 2 \times 1,7}{2}$ ، $س = \frac{2 - 2 \times 1,7}{2}$

$س = 2,7$ ، $س = -0,7$

م.ح = { 2,7 ، -0,7 }

==========

③ $س(س + 5) + 5 = 0$

مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

الحل

$س^2 + 5 س + 5 = 0$

$ا = 1$ ، $ب = 5$ ، $جـ = 5$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 ا جـ}}{2 ا}$$

$$س = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$س = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2} = -1,382$ ، $س = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2} = -3,618$

م.ح = { -1,382 ، -3,618 }

==========

④ $س + \frac{3}{س} = 1$

الحل

بالضرب × س

$س^2 + 3 = س$

$س^2 - س + 3 = 0$

$ا = 1$ ، $ب = -1$ ، $جـ = 3$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 ا جـ}}{2 ا}$$

$$س = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1}$$

$$س = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

$\sqrt{-11} \notin ح$

م.ح = $\emptyset$

==========

⑥ $3 س^2 - 5 س - 1 = 0$

الحل

$ا = 3$ ، $ب = -5$ ، $جـ = -1$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 ا جـ}}{2 ا}$$

$$س = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 3 \times -1}}{2 \times 3}$$

$$س = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

$س = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} = 1,84$ ، $س = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} = -0,18$

م.ح = { 1,84 ، -0,18 }

تمارين ٢

١ **مثل** بيانياً كلاً من الدوال الآتية فى الفترة المعطاة و من الرسم **أوجد** رأس المنحنى ومعادلةمحور التماثل
و**أوجد** جذرى المعادلة د (س) = ٠ :

① د (س) = - س^٢ + ٣ ، س ∈ [-٣ ، ٣]
② د (س) = س^٢ - ٢ س - ٣ ، س ∈ [-٢ ، ٤]
③ د (س) = س^٢ - ٤ س + ٣ على الفترة [٠ ، ٤]
④ د (س) = ٢ س^٢ - ٣ (٢ - س) فى الفترة [-٣ ، ٢]
⑤ د (س) = س^٢ + ١ فى الفترة [-٣ ، ٣]

---

٢ **أوجد** مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية

① ٢ س^٢ - ٤ س + ١ = ٠
② س^٢ - ٦ س + ٧ = ٠
③ س (س - ١) = ٤ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية
④ (س - ٣)^٢ - ٥ س = ٠
⑤ $\frac{١}{س - ٣} = \frac{س}{٢}$
⑥ س^٢ - ٢ س - ٤ = ٠ علماً بأن √٥ ≃ ٢,٢٤
⑦ س^٢ - ٢ (س + ٣) = ٠ علماً بأن √٧ ≃ ٢,٦٨

حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى و الأخرى من الدرجة الثانية

١ أوجد فى ح^٢ مجموعة حل كل من المعادلات الآتية

① س - ص = ١ ، س^٢ + ص^٢ = ١٣

الحل

س = ١ + ص

س^٢ + ص^٢ = ١٣
(١ + ص)^٢ + ص^٢ = ١٣
١ + ٢ص + ص^٢ + ص^٢ = ١٣
٢ص^٢ + ٢ ص + ١ - ١٣ = ٠
٢ص^٢ + ٢ ص - ١٢ = ٠ ÷ ٢
ص^٢ + ص - ٦ = ٠
(ص + ٣) (ص - ٢) = ٠

بالتعويض فى الأولى

ص = -٣	ص = ٢
س = ١ - ٣	س = ١ + ٢
س = -٢	س = ٣

م.ح = {(-٢ ، -٣) ، (٣ ، ٢)}

---

② س = ص ، س^٢ + ص^٢ = ٥٠

الحل

س = ص

س^٢ + ص^٢ = ٥٠
ص^٢ + ص^٢ = ٥٠
٢ ص^٢ - ٥٠ = ٠ ÷ ٢
ص^٢ - ٢٥ = ٠
(ص - ٥) (ص + ٥) = ٠

ص = ٥	ص = -٥
س = ٥	س = -٥

م.ح = {(٥ ، ٥) ، (-٥ ، -٥)}

---

③ س = ٣ ، س ص = ٦

الحل

س = ٣ ⟸ ٣× ص = ٦ ÷ ٣
ص = ٢

م.ح = {(٣ ، ٢)}

④ ص - س = ١ ، س٢ - ص٢ = -٥

الحل

ص = س + ١

س٢ - (س + ١)٢ = -٥

س٢ - (س٢ + ٢س + ١) = -٥

س٢ - س٢ - ٢س - ١ = -٥

-٢س - ١ = -٥

-٢س = -٥ + ١

-٢س = -٤ ÷ -٢

س = ٢ ⇐ ص = ٣

∴ م.ح = {(٢ ، ٣)}

---

⑤ س - ص = ١٠ ، س٢ - ٤س ص + ص٢ = ٥٢

الحل

س = ص + ١٠

(ص + ١٠)٢ - ٤(ص + ١٠) ص + ص٢ = ٥٢

ص٢ + ٢٠ص + ١٠٠ - ٤ص٢ - ٤٠ص + ص٢ = ٥٢

-٢ص٢ - ٢٠ص + ١٠٠ - ٥٢ = ٠

-٢ص٢ - ٢٠ص + ٤٨ = ٠ ÷ -٢

ص٢ + ١٠ص - ٢٤ = ٠

(ص - ٢)(ص + ١٢) = ٠

ص = ٢	ص = -١٢
س = ٢ + ١٠	س = -١٢ + ١٠
س = ١٢	س = -٢

م.ح = {(١٢ ، ٢) ، (-٢ ، -١٢)}

---

⑥ س + ص = ٧ ، س ص = ١٢

الحل

ص = ٧ - س

س ص = ١٢

س (٧ - س) = ١٢

٧س - س٢ - ١٢ = ٠

س٢ - ٧س + ١٢ = ٠

(س - ٣)(س - ٤) = ٠

س = ٣	س = ٤
ص = ٧ - ٣	ص = ٧ - ٤
ص = ٤	ص = ٣

م.ح = {(٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣)}

تطبيقات على حل معادلتين فى متغيرين

ملاحظات

إذا كان العدد س فإن

١) ضعفه ٢ س وثلاثة امثاله ٣ س

٢) مربعه س٢

٣) إذا كان عمر أحمد الآن هو س

فعمره بعد ٣ سنوات هو : س + ٣

وعمره قبل ٥ سنوات هو : س - ٥

٤) محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

٥) مساحة المستطيل = الطول × العرض

٦) مساحة المعين = نصف حاصل ضرب قطريه

---

① عددان نسبيان مجموعهما ٦٣ ، الفرق بينهما ١٣ أوجد العددين ؟

الحل

نفرض ان العددان هما س ، ص

س + ص = ٦٣ ، س - ص = ١٣

س + ص = ٦٣

س - ص = ١٣

٢س = ٧٦ ÷ ٢

س = ٣٨ ⇐ ٣٨ + ص = ٦٣

ص = ٦٣ - ٣٨ = ٢٥

العددان هما ٣٨ ، ٢٥

---

② أوجد عددان صحيحان مجموعهما ٩ وثلاثة امثال اصغرهما يزيد عن ضعف اكبرهما بمقدار ٢

الحل

نفرض ان الاصغر = س والاكبر = ص

س + ص = ٩ × ٢

٣س - ٢ص = ٢ × ١

٢س + ٢ص = ١٨

٣س - ٢ص = ٢

٥س = ٢٠ ⇐ س = ٤

٤ + ص = ٩ ⇐ ص = ٩ - ٤

ص = ٥

العددان هما ٤ ، ٥

③ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم ، فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم . أوجد مساحة المستطيل

الحل

نفرض أن طول المستطيل = س وعرضه = ص

س - ص = ٤   ومحيطه = ٢٨

(س + ص) × ٢ = ٢٨ ÷ ٢

س + ص = ١٤

س - ص = ٤

س + ص = ١٤

٢ س = ١٨ ⟸ س = $\frac{١٨}{٢}$ = ٩ سم

ص = ١٤ – ٩ = ٥ سم

∴ مساحة المستطيل = ٩ × ٥ = ٤٥ سم^2

---

④ مستطيل محيطه = ٢٠ سم ومساحته = ٢٤ أوجد بعديه

الحل

نفرض أن طول المستطيل = س وعرضه = ص

محيطه = ٢٠

(س + ص) × ٢ = ٢٠

س + ص = ١٠

ص = ١٠ – س

مساحة المستطيل = ٢٤

س ص = ٢٤

س (١٠ – س) = ٢٤

١٠ س – س^2 – ٢٤ = ٠

س^2 – ١٠ س + ٢٤ = ٠

(س – ٤)(س – ٦) = ٠

س = ٤ ، س = ٦

ص = ٦ ، ص = ٤

أبعاد المستطيل ٤ ، ٦

---

⑤ عددين مجموعهما = ٦ ومجموع مربعيهما = ٢٠
أوجد هذان العددان

الحل

نفرض أن العددان هما س ، ص

س + ص = ٦

ص = ٦ – س

س^2 + ص^2 = ٢٠

س^2 + (س – ٦)^2 = ٢٠

س^2 + ٣٦ – ١٢ س + س^2 – ٢٠ = ٠

٢ س^2 – ١٢ س + ١٦ = ٠ ÷ ٢

س^2 – ٦ س + ٨ = ٠

(س – ٢)(س – ٤) = ٠

س = ٢ ، س = ٤

ص = ٤ ، ص = ٢

∴ العددان هما ٢ ، ٤

---

⑥ عددان الفرق بينهما ٢ ومجموع مربعيهما = ٣٤ أوجد هذان العددان

الحل

نفرض أن العددان س ، ص

س – ص = ٢

س = ٢ + ص

س^2 + ص^2 = ٣٤

(٢ + ص)^2 + ص^2 = ٣٤

٤ + ٤ ص + ص^2 + ص^2 – ٣٤ = ٠

٢ ص^2 + ٤ ص – ٣٠ = ٠ ÷ ٢

ص^2 + ٢ ص – ١٥ = ٠

(ص + ٥)(ص – ٣) = ٠

ص = –٥ ، ص = ٣

س = –٣ ، س = ٥

العددان هما –٣ ، –٥ أو ٣ ، ٥

---

⑦ مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعي القائمة يزيد عن الضلع الاخر بمقدار ٢ وطول وتره = ١٠سم أوجد محيطه

الحل

نفرض أن ضلعي القائمة س ، ص

س – ص = ٢

– ص = ٢ – س

ص = س – ٢

س^2 + ص^2 = ١٠٠

س^2 + (س – ٢)^2 = ١٠٠

س^2 + س^2 – ٤ س + ٤ – ١٠٠ = ٠

٢ س^2 – ٤ س – ٩٦ = ٠ ÷ ٢

س^2 – ٢ س – ٤٨ = ٠

(س – ٨)(س + ٦) = ٠

س = ٨ ، س = –٦ مرفوض

ص = ٨ – ٢

ص = ٦

أضلاع المثلث = ٦ ، ٨ ، ١٠

محيطه = ٦ + ٨ + ١٠ = ٢٤ سم

تمارين ٣

١ اكمل مكان النقط :

(١) مجموعة الحل للمعادلتين : س ـ ص = ٠، س ص = ٩ هي . . . . .

(٢) عددان موجبان مجموعهما ٧ و حاصل ضربهما ٢ ١ فما هما العددين . . . .

(٣) المعادلة: س ص = ٣ من الدرجة . . . . . .

(٤) مجموعة الحل للمعادلتين :س = ١ ، س^2 + ص^2 = ١٠ هي . . . . . .

(٥) اذا كان : س ـ ص = ٣ ، س^2 ـ ص^2 = ٦ فان س + ص = ...

(٦) عددان موجبان مجموعهما ٣ و مجموع مربعيهما ٥ فان العددان هما . . . . . .

(٧) مجموعة الحل للمعادلتين س = ص ، س ص = ١ هي . . . . .

(٨) اذا كان س = ص + ١ ، (س ـ ص) + ص = ٣ فان ص = . .

(٩) اذا كان أ ب = ٣ ، أ ب^2 = ١٢ فان ب = ...

(١٠) عددان موجبان الفرق بينهما ١ ، مربع مجموعهما ٢٥ فان العددين هما . .

(١١) مستطيل طوله ٣سم و طول قطره ٤ سم فان عرضه = ... سم

(١٢) مجموعة الحل للمعادلتين س+ص = ٠ ، س^2 + ص^2 = ٢هي . . . .

٢ أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الاتية

(١) س + ص = ٦ ، س^2 + ص^2 = ٢٠

(٢) س + ص = ٨ ، س^2 ـ ص^2 = ١٦

(٣) س ـ ص = ٣ ، س^2 + ص^2 = ٢٩

(٤) ص ـ س = ٣ ، س^2 + ص^2 ـ س ص = ١٣

(٥) س = ص ، س^2 + ص^2 = ٥٠

(٦) ص ـ ٢ س = ٠ ، س ص = ٨

(٧) ص = ١ ـ س ، س^2 + س ص + ص^2 = ٣

(٨) س + ص = ٢ ، $\frac{١}{س}$ + $\frac{١}{ص}$ = ٣

(٩) ٢س + ص = ٧ ، ٢ س^2 + س + ٣ص = ١٩

(١٠) س + ص = ٤ ، س^2 ـ س ص + ص^2 = ٧

٣ أجب عما يلى

(١) ع[illegible]ن مجموعهما ٥٠ و[illegible]هما ٢٠ فما هما العددان ؟

(٢) ع[illegible]ن مجموعهما ٧ ومجمو[illegible] ١١ فما هما العددان ؟

(٣) عددان مجموعهما = ٥ ومجموع مربعيهما = ١٣ أوجد هذان العددان

(٤) عددان حقيقيان الفرق بين مربعيهما = ٧ ، مجموعهما = ٧ فما هما العددان ؟

(٥) أوجد عددين نسبيين حاصل ضربهما = ٢ ، مجموع احدهما وضعف الآخر = ٤

(٦) مستطيل محيطه = ١٤ سم ومساحته = ١٢ سم^2 أوجد بعديه

(٧) مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار٣ سم و مساحته ٢٨ سم^2 اوجد محيطه

(٨) مثلث قائم الزاوية مجموع طولى ضلعى القائمة = ١٤ سم وطول الوتر = ١٠ سم

(٩) مثلث قائم الزاوية محيطه ٣٠ سم وطول الوتر = ١٣

(١٠) زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠° أوجد قياس كل منهما

(١١) عددان احدهما معكوس جمعي للاخر و مجموع مربعيهما هو ٢ اوجد العددين

(١٢) معين الفرق بين طولي قطريه ٤ سم و محيطه ٤٠ سم اوجد طول كل من قطريه .

(١٣) عدد مكون من رقمين مجموعهما ٥ فإذا بدل وضع الرقمين فإن العدد الناتج يزيد علي العدد الاصلي بمقدار ٩ فماهو العدد ؟

دوال الكسور الجبرية

مجموعة أصفار دالة كثيرة الحدود :-

هى قيم س التى عندها قيمة الدالة تساوى صفر ونحصل عليها بوضع د(س) = ٠ ويرمز لها بالرمز ص (د)

١ أوجد مجموعة أصفار كل من الدوال الآتية

① د (س) = س - ٥

الحل: س - ٥ = ٠ ⟸ س = ٥

ص (د) = { ٥ }

② د (س) = ٧ س

الحل: ٧ س = ٠ ÷ ٧ ⟸ س = ٠

ص (د) = { صفر }

③ د (س) = $س^٢$ - ٩

الحل: $س^٢$ - ٩ = ٠

(س - ٣) (س + ٣) = ٠

ص (د) = { ٣ ، - ٣ }

④ د (س) = $س^٢$ + ٢٥

الحل: $س^٢$ + ٢٥ لا تحلل

ص (د) = ∅

مجموع المربعين لا يقبل التحليل

⑤ د (س) = ٥

الحل: ص (د) = ∅

الدالة ثابتة

⑥ د (س) = صفر

الحل: ص (د) = ح

⑦ د (س) = $س^٣$ - ٨

الحل: $س^٣$ - ٨ = ٠

(س - ٢) ($س^٢$ + ٢ س + ٤) = ٠

س = ٢   لا تحلل

ص (د) = { ٢ }

فرق بين مكعبين أو مجموع مكعبين لا يقبل التحليل القوس الأكبر في تحليل

⑧ د (س) = $س^٢$ – ٥ س +٦

الحل: $س^٢$ – ٥ س + ٦ = ٠

(س – ٢)(س – ٣) = ٠

س = ٢   س = ٣ ⟸ ص (د) = { ٢ ، ٣ }

⑨ د (س) = $س^٣$ – ٧$س^٢$ + ١٢س

الحل: $س^٣$ – ٧ $س^٢$ +١٢ س = ٠

س ($س^٢$ – ٧ س +١٢) = ٠

س (س – ٣)(س – ٤) = ٠

س=٠   س=٣   س=٤

ص(د) = { ٠ ، ٣ ، ٤ }

⑩ د (س) = ٣$س^٢$ – ١٠ س +٨

الحل: (٣س – ٤) (س – ٢) = ٠

٣س = ٤   س = ٢

س = $\frac{٤}{٣}$ ص (د) = { $\frac{٤}{٣}$ ، ٢ }

٣س	– ٤
س	– ٢

أصفار الدالة الكسرية

مجموعة أصفار الدالة الكسرية = {أصفار البسط} – {أصفار المقام}

٢ أوجد مجموعة أصفار كل من الدوال الآتية

① د(س) = $\frac{س^٢ – ٨س + ١٥}{س^٢ – ٢٥}$

الحل: د(س) = $\frac{(س - ٣) (س - ٥)}{(س + ٥) (س - ٥)}$

ص (د) = { ٣ ، ٥ } – { - ٥ ، ٥ } = { ٣ }

② د(س) = $\frac{س^٢ – ٤س + ٣}{س^٢ – ٥ س + ٦}$

الحل: $\frac{(س – ١)(س – ٣)}{(س – ٢)(س – ٣)}$

ص (د) = { ١ ، ٣ } – { ٢ ، ٣ } = { ١ }

③ د(س) = $\frac{١٥}{س^٢ – ٣٦}$

الحل: ص (د) = ∅

مجال الدالة الكسرية الجبرية

ملاحظات

(١) مجال الدالة كثيرة الحدود = ح

(٢) مجال الكسر الجبرى = ح ـ مجموعة أصفار المقام

١ أوجد مجال كل من الدوال الآتية

① د (س) = س^٢ ـ ٢ س ـ ٤ ⟸ المجال = ح

② د (س) = ٥ ⟸ المجال = ح

③ د (س) = س^٣ ـ $\frac{٤}{٣}$ س^٢ ـ ١٢ ⟸ المجال = ح

④ د(س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٣}$ ⟸ المجال = ح ـ { ٣ }

⑤ د(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^٢ - ٤}$

الحل = $\frac{\text{س}}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$

المجال = ح ـ { ٢ ، ـ٢ }

⑥ د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ١٠ \text{س} + ٢١}{\text{س}^٢ - ٢٥}$

الحل د(س) = $\frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٧)}{(\text{س} + ٥)(\text{س} - ٥)}$

المجال = ح ـ {ـ٥ ، ٥}

⑦ د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٦ \text{س} + ٨}{\text{س}^٢ + ٢٥}$

المقام لا يقبل التحليل

الحل المجال = ح

⑧ د(س) = $\frac{\text{س} + ٧}{٩}$ ⟸ المجال = ح

المقام دالة ثابتة

⑨ د(س) = $\frac{\text{س}^٢ + ١٦}{\text{س}^٣ - ٢٧}$

القوس الكبير لا يحلل

الحل د(س) = $\frac{\text{س}^٢ + ١٦}{(\text{س} - ٣)(\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩)}$

المجال = ح ـ { ٣ }

المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر = ح ـ مجموعة أصفار المقامات

٢ أوجد المجال المشترك لكلا من الكسور الجبرية الاتية

① $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س}}$ ، $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} - ٢}$

الحل المجال المشترك = ح ـ { ٠ ، ٢ }

② $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ٢}$ ، $\frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١}{\text{س}^٢ - ٩}$

الحل $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ٢}$ | $\frac{(\text{س} - ١)(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}$

المجال المشترك = ح ـ { ـ٢ ، ٣ ، ـ٣ }

③ $\frac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ١٠}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$ ، $\frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٨}{\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ١٢}$

الحل $\frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٥)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}$ | $\frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٤)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٦)}$

المجال المشترك = ح ـ { ٢ ، ٣ ، ٦ }

④ $\frac{٥}{\text{س}}$ ، $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ١}$ ، $\frac{\text{س}}{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢}$

الحل $\frac{٥}{\text{س}}$ ، $\frac{\text{س} - ٣}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$ ، $\frac{\text{س}}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٤)}$

المجال المشترك = ح ـ {٠ ، ١ ، ـ١ ، ٣ ، ٤}

اختزال الكسر الجبرى

إذا كانت هناك عوامل مشتركة بين البسط والمقام فانه يمكن أختزال(اختصار) الكسر الجبرى بالتخلص من هذه العوامل المشتركة

ملاحظة هامة يجب تعيين مجال الكسر الجبرى قبل أختزاله

تساوى كسرين جبريين

الدالتين $\text{ن}_١$ ، $\text{ن}_٢$ متساويتان إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً

① مجال $\text{ن}_١$ = مجال $\text{ن}_٢$

② $\text{ن}_١$(س) = $\text{ن}_٢$(س) بعد الاختصار

③ اختزل كلا من الكسور الجبرية الأتية مبينا مجال كلا منها

① $د(س) = \frac{س^2 - 5س + 6}{س^2 - 9}$

الحل

$د(س) = \frac{(س - 3)(س - 2)}{(س - 3)(س + 3)}$

المجال $= ح - \{3 ، -3\}$

$د(س) = \frac{س - 2}{س + 3}$

==========

② $د(س) = \frac{س^2 - 4س + 3}{س^2 - س}$ و أوجد د(٢) ، د (١) إن أمكن

الحل

$د(س) = \frac{(س - 3)(س - 1)}{س (س - 1)}$

المجال $= ح - \{0 ، 1\}$

$د(س) = \frac{س - 3}{س}$

$د(2) = \frac{2 - 3}{2} = \frac{-1}{2}$ د(١) غير معرفة لأن ١ ∉ لمجال د (س)

==========

③ $د(س) = \frac{س - 2}{س^3 - 8}$

الحل

$د(س) = \frac{س - 2}{(س - 2)(س^2 + 2س + 4)}$

المجال $= ح - \{2\}$ $د(س) = \frac{1}{س^2 + 2س + 4}$

==========

④ إذا كان $ن_1(س) = \frac{5س}{5س - 10}$ ، $ن_2(س) = \frac{2س}{2س - 4}$

هل $ن_1 = ن_2$ مع ذكر السبب ؟

الحل

$ن_1(س) = \frac{5س}{5س - 10} = \frac{5س}{5(س - 2)} = \frac{س}{س - 2}$

مجال $ن_1 = ح - \{2\}$

$ن_2(س) = \frac{2س}{2س - 4} = \frac{2س}{2(س - 2)} = \frac{س}{س - 2}$

مجال $ن_2 = ح - \{2\}$

مجال $ن_1$ = مجال $ن_2$

، $ن_1(س) = ن_2(س)$ بعد الاختصار

$\therefore ن_1 = ن_2$

==========

⑤ إثبت أن $ن_1 = ن_2$

$ن_1(س) = \frac{س^2}{س^3 - س^2}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^3 + س^2 + س}{س^4 - س}$

الحل

$ن_1(س) = \frac{س^2}{س^2(س - 1)}$

مجال $ن_1 = ح - \{0 ، 1\}$

$ن_1(س) = \frac{1}{س - 1}$

$ن_2(س) = \frac{س(س^2 + س + 1)}{س(س^3 - 1)} = \frac{س(س^2 + س + 1)}{س(س - 1)(س^2 + س + 1)}$

مجال $ن_2 = ح - \{0 ، 1\}$

$ن_2(س) = \frac{1}{س - 1}$

$\because$ مجال $ن_1$ = مجال $ن_2$

، $ن_1(س) = ن_2(س)$ بعد الاختصار

$\therefore ن_1 = ن_2$

==========

⑥ هل $ن_1 = ن_2$ إذا كان

$ن_1(س) = \frac{س^2 + 3س + 2}{س^2 - 4}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 - 1}{س^2 - 3س + 2}$

ثم أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتين

الحل

$ن_1(س) = \frac{س^2 + 3س + 2}{س^2 - 4} = \frac{(س + 2)(س + 1)}{(س + 2)(س - 2)}$

مجال $ن_1 = ح - \{-2 ، 2\}$

$ن_1(س) = \frac{س + 1}{س - 2}$

$ن_2(س) = \frac{س^2 - 1}{س^2 - 3س + 2} = \frac{(س - 1)(س + 1)}{(س - 1)(س - 2)}$

مجال $ن_2 = ح - \{2 ، 1\}$

$ن_2(س) = \frac{س + 1}{س - 2}$

① مجال $ن_1$ ≠ مجال $ن_2$

② $ن_1(س) = ن_2(س)$ ⟸ $ن_1 \neq ن_2$

المجال الذى تتساوى فيه الدالتان هو : $ح - \{-2 ، 1 ، 2\}$

==========

تمارين ٤

١ عين أصفار كلا من الدوال الاتية

① د(س) = $٢س + ٤$
② د(س) = ٥
③ د(س) = $س^{٢} + ٤$
④ د(س) = $٢٥ - ٩س^{٢}$
⑤ د(س) = $س^{٣} - ٤س^{٢}$
⑥ د(س) = $س^{٢} - ٢س - ١$
⑦ د(س) = $س^{٢} - ٢$
⑧ د(س) = $س^{٢} - ٩$
⑨ د(س) = ٠
⑩ د(س) = $س^{٢} + س + ١$
⑪ د(س) = $س^{٢} - ٢س + ١$
⑫ د(س) = $س^{٢} - ٢س$
⑬ د(س) = $س^{٣} - ١٢٥$
⑭ د(س) = $س^{٣} - ٧س^{٢} + ١٢س$
⑮ د(س) = $\frac{س^{٢} - ١٦}{س^{٢} - ٢٥}$
⑯ د(س) = $\frac{س^{٣} - س^{٢} - ٢٠س}{س^{٣} - ١٢٥}$
⑰ د(س) = $\frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س^{٢} - ١}$
⑱ د(س) = $\frac{١ - س^{٢}}{س^{٣} - ٨}$
⑲ د(س) = $\frac{(س^{٢} - ١)(س^{٣} + ٨)}{س^{٢} - ٤س + ٣}$
⑳ د(س) = $\frac{س^{٢} + ٤}{س}$

٢ عين مجال كلا من الدوال الاتية

① د(س) = $\frac{س - ٥}{س + ٢}$
② د(س) = $\frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٣} - ٩س}$
③ د(س) = $\frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س^{٢} - ٤س + ٤}$
④ د(س) = $\frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س^{٢} - س - ١٢}$
⑤ د(س) = $\frac{س^{٢} - س - ٢٠}{٢س^{٢} - س}$
⑥ د(س) = $\frac{س^{٢} - ٣س - ١٠}{س^{٢} + ١٦}$
⑦ د(س) = $\frac{س^{٣} - س^{٢} - ٢٠س}{س^{٣} - ١٢٥}$

٣ أوجد المجال المشترك لكلا من الكسور الجبرية الاتية

① $\frac{٣}{س}$ ، $\frac{٥}{س - ٢}$
② $\frac{١}{س + ٢}$ ، $\frac{٣}{س - ١}$
③ $\frac{س}{س - ١}$ ، $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٤}$
④ $\frac{س - ٣}{س}$ ، $\frac{س^{٢} + ٣}{س^{٢} - ٢س - ٤٨}$
⑤ $\frac{س}{س^{٢} - ٢س}$ ، $\frac{٥س}{س^{٢} + ٤}$
⑥ $\frac{س - ١}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ ، $\frac{س}{س^{٢} - ٩}$
⑦ $\frac{١}{٣س}$ ، $\frac{٣}{س - ٢}$ ، $\frac{س}{س + ٥}$
⑧ $\frac{س}{٢س - ٣}$ ، $\frac{س - ٢}{س^{٢} + ١}$ ، $\frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢} - ٤}$
⑨ $\frac{س}{٤}$ ، $\frac{س - ٢}{س^{٢} - ١}$ ، $\frac{س - ١}{٣س^{٢} - ٢س - ٨}$

٤ أختزل كلا من دوال الاتية مبيناً مجال كلا منها

① د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$
② د(س) = $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٩}$
③ د(س) = $\frac{س - ٤}{س^{٢} - ٥س + ٤}$
④ د(س) = $\frac{س^{٢} - ٧س + ١٠}{س^{٢} - ٢٥}$
⑤ د(س) = $\frac{س^{٢} - ٨س + ١٥}{س^{٢} - ٥س + ٦}$
⑥ د(س) = $\frac{س^{٣} - ٥س^{٢} + ٦س}{س^{٤} - ٢٧س}$
⑦ د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{٣س^{٢} - ٣}$

٥ إذا كان $د_١(س) = \frac{س^٢ + ٤س + ٣}{س^٢ + س - ٦}$ ، $د_٢(س) = \frac{س^٢ - ٦س - ٧}{س^٢ - ٩س + ١٤}$

أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه $د_١(س)$ ، $د_٢(س)$

---

٦ إذا كانت $د_١(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦}$ ، $د_٢(س) = \frac{س^٣ - س^٢ - ٦س}{س^٣ - ٩س}$

اثبت أن $د_١(س) = د_٢(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى إلى المجال المشترك للدالتين و أوجد هذا المجال

---

٧ إذا كان $ن_١(س) = \frac{س^٣ - س^٢ - ٦س}{س^٣ - ٩س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦}$

إثبت أن $ن_١ = ن_٢$ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك للدالتين وأوجد هذا المجال

---

٨ إذا كان $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س}$ هل $ن_١ = ن_٢$ مع ذكر السبب ؟

---

٩ اكمل مكان النقط

١) مجموعة اصفار الدالة د(س) = ـ ٣س هي . . .

٢) مجموعة اصفار الدالة د(س) = س (س^٢ ـ ٢س + ١) هي . . .

٣) اذا كانت ص(د) = { ٢ } , د(س) = س^٣ ـ م فان م = ...

٤) مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = ٤ س ^٢ - ٩ هي ....

٥) اذا كانت ص (د) = { ٥ } , د(س) = س^٣ ـ ٣س^٢ + أ فان أ = . . .

٦) اذا كانت ص (د) = { ١ ، ـ٢ } , د(س) = س^٢ + س + أ فان أ = ...

٧) إمجموعة اصفار الدالة د(س) = (س ـ ٥)^٢ هي . . . . .

٨) مجموعة اصفار الدالة د(س) = (س ـ ١)^٢(س + ٢) هي . . . . .

٩) اذا كانت ص(د) = { ـ٢ ، ٢ } , د(س) = س^٢ + م فان م = ...

١٠) مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = س ^٢ + ١ هي ....

١١) مجال ن (س) = ٢ س^صفر ، س ≠ ٠ هو ....

١٢) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س + ٢}{س - ١}$ هو ....

١٣) مجال الدالة د حيث : د (س) = $\frac{س^٢ - س}{س^٢ - ٢س - ٣}$ هو .... ، ص(د) = ...

١٤) مجال الدالة د حيث د(س) = $\frac{س + ٢}{٥س}$ هو ....

١٥) مجال الدالة د حيث د(س) = $\frac{س^٢ + ٢}{س^٢ + ٤}$ هو ....

١٦) مجموعة أصفار الدالة : د حيث د (س) = $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ هي ....

١٧) أبسط صورة للدالة : د حيث د (س) = $\frac{٥ - س}{س - ٥}$ ، س ≠ ٥ هي ....

١٨) إذا كان مجال د (س) = $\frac{س - ٦}{س^٢ + ب}$ هو ح - {٦ ، -٦} فإن ب = ...

العمليات على الكسور الجبرية

١ جمع الكسور الجبرية

١ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

① $ن(س) = \frac{٢س}{س + ٢} + \frac{٤}{س + ٢}$

الحل

$ن(س) = \frac{٢س + ٤}{س + ٢}$ مجال ن = ح − {−٢}

$= \frac{٢(س + ٢)}{س + ٢} = ٢$

② $ن(س) = \frac{س^٢ − ٨س + ١٢}{س^٢ − ٤س + ٤} + \frac{س^٢ − ٤س − ٥}{س^٢ − ٧س + ١٠}$

الحل

$ن(س) = \frac{(س − ٢)(س − ٦)}{(س − ٢)(س − ٢)} + \frac{(س + ١)(س − ٥)}{(س − ٢)(س − ٥)}$

مجال ن = ح − {٢ ، ٥}

$= \frac{س − ٦}{س − ٢} + \frac{س + ١}{س − ٢}$

$= \frac{س − ٦ + س + ١}{س − ٢} = \frac{٢س − ٥}{س − ٢}$

③ $ن(س) = \frac{س − ٣}{س^٢ − ٤س + ٣} + \frac{س − ٢}{س^٢ − ٥س + ٦}$

الحل

$ن(س) = \frac{س − ٣}{(س − ٣)(س − ١)} + \frac{س − ٢}{(س − ٢)(س − ٣)}$

مجال ن = ح − {٣ ، ١ ، ٢}

$= \frac{١}{س − ١} + \frac{١}{س − ٣} =$

$= \frac{س − ٣ + س − ١}{(س − ١)(س − ٣)}$

$= \frac{٢س − ٤}{(س − ١)(س − ٣)}$

$= \frac{٢(س − ٢)}{(س − ١)(س − ٣)}$

④ $ن(س) = \frac{٣س − ٦}{س^٢ − س − ٢} + \frac{س^٢ + س − ٦}{س^٢ + ٤س + ٣}$

الحل

$ن(س) = \frac{٣(س − ٢)}{(س + ١)(س − ٢)} + \frac{(س + ٣)(س − ٢)}{(س + ٣)(س + ١)}$

مجال ن(س) = ح − {−١ ، ٢ ، −٣}

$ن(س) = \frac{٣}{س + ١} + \frac{س − ٢}{س + ١}$

$= \frac{٣ + س − ٢}{س + ١} = \frac{س + ١}{س + ١} = ١$

⑤ $ن(س) = \frac{س}{س^٢ − ١} + \frac{٢}{س^٢ − ٦س + ٥}$

الحل

$ن(س) = \frac{س}{(س − ١)(س + ١)} + \frac{٢}{(س − ١)(س − ٥)}$

المجال = ح − {١ ، −١ ، ٥}

$= \frac{س(س − ٥) + ٢(س + ١)}{(س − ١)(س + ١)(س − ٥)}$

$= \frac{س^٢ − ٥س + ٢س + ٢}{(س − ١)(س + ١)(س − ٥)}$

$= \frac{س^٢ − ٣س + ٢}{(س − ١)(س + ١)(س − ٥)}$

$= \frac{(س − ١)(س − ٢)}{(س − ١)(س + ١)(س − ٥)}$

$= \frac{س − ٢}{(س + ١)(س − ٥)}$

ملاحظة مجال الكسر الجبرى = مجال معكوسه الجمعى

المعكوس الجمعى للكسر $\frac{١}{س − ٢} = \frac{−١}{س − ٢}$

$= \frac{١}{−س + ٢} = \frac{١}{٢ − س}$

أبسط صورة للكسر $\frac{٤ − س}{س − ٤} = \frac{−(س − ٤)}{س − ٤} = −١$

٢ الكسور الجبرية

١ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً مجال ن

① $ن(س) = \frac{٣}{س - ١} - \frac{٢}{س - ١}$

الحل

مجال ن = ح − { ١ }

$= \frac{٣ - ٢}{س - ١} = \frac{١}{س - ١}$

==

② $ن(س) = \frac{س^٢ - ٧س + ١٠}{س^٢ - ٥س + ٦} - \frac{س^٢ - ٣س - ١٠}{س^٢ - ٨س + ١٥}$

الحل

$ن(س) = \frac{(س - ٢)(س - ٥)}{(س - ٣)(س - ٢)} - \frac{(س + ٢)(س - ٥)}{(س - ٣)(س - ٥)}$

مجال ن = ح − { ٣ ، ٢ ، ٥ }

$= \frac{س - ٥}{س - ٣} - \frac{س + ٢}{س - ٣}$

$= \frac{س - ٥ - س - ٢}{س - ٣} = \frac{- ٧}{س - ٣}$

==

③ $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س^٣ - ٨} - \frac{٩ - س^٢}{س^٢ + س - ٦}$

الحل

$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س^٣ - ٨} + \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ + س - ٦}$

$= \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)} + \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٢)(س + ٣)}$

مجال ن = ح − {٢ ، - ٣}

$= \frac{١}{س - ٢} + \frac{س - ٣}{س - ٢} = \frac{س - ٢}{س - ٢} = ١$

==

④ $ن(س) = \frac{٤}{س^٢ - ٤س - ٥} + \frac{٢}{س^٢ - ١}$

الحل

$ن(س) = \frac{٤}{س^٢ - ٤س - ٥} - \frac{٢}{س^٢ - ١}$

$= \frac{٤}{(س - ٥)(س + ١)} - \frac{٢}{(س - ١)(س + ١)}$

المجال = ح − {٥ ، - ١ ، ١}

$= \frac{٤(س - ١) - ٢(س - ٥)}{(س - ٥)(س + ١)(س - ١)}$

$= \frac{٤س - ٤ - ٢س + ١٠}{(س - ٥)(س + ١)(س - ١)}$

$= \frac{٢س + ٦}{(س - ٥)(س + ١)(س - ١)}$

⑤ $ن(س) = \frac{س}{س - ١} + \frac{س}{٢ - س}$

الحل

$ن(س) = \frac{س}{س - ١} - \frac{س}{س - ٢}$

مجال ن = ح − { ١ ، ٢ }

$= \frac{س(س - ٢) - س(س - ١)}{(س - ١)(س - ٢)}$

$= \frac{س^٢ - ٢س - س^٢ + س}{(س - ١)(س - ٢)}$

$= \frac{- س}{(س - ١)(س - ٢)}$

==

⑥ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س}{س^٢ - ٣س + ٢} - \frac{٤ - س^٢}{س^٢ + س - ٢}$

و أوجد ن(٢) ، ن(٣) ، ن(٠) إن أمكن

الحل

$ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س}{س^٢ - ٣س + ٢} + \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٢}$

$= \frac{س(س - ٢)}{(س - ٢)(س - ١)} + \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س + ٢)(س - ١)}$

المجال = ح − { ٢ ، ١ ، - ٢ }

$= \frac{س}{س - ١} + \frac{س - ٢}{س - ١} = \frac{س + س - ٢}{س - ١}$

$= \frac{٢س - ٢}{س - ١} = \frac{٢(س - ١)}{س - ١} = ٢$

ن(٢) غير معرفة لأن ٢ ∉ لمجال ن(س)

ن(٣) = ٢ ن(٠) = ٢

==

٣ ضرب الكسور الجبرية

١ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

① $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س^٢ + ٣س - ١٨} \times \frac{س + ٢}{س^٢ + س - ٢٠}$

الحل

$ن(س) = \frac{(س-٣)(س+٥)}{(س-٣)(س+٦)} \times \frac{(س+٢)}{(س-٤)(س+٥)}$

مجال ن = ح − { ٣ ، −٦ ، ٤ ، −٥ }

$= \frac{س + ٢}{(س+٦)(س-٤)}$

---

② $ن(س) = \frac{س^٢ - ١٢س + ٣٦}{س^٢ - ٦س} \times \frac{٤س + ٢٤}{٣٦ - س^٢}$

الحل

$ن(س) = \frac{س^٢ - ١٢س + ٣٦}{س^٢ - ٦س} \times \frac{٤س + ٢٤}{-(س^٢ - ٣٦)}$

$= \frac{(س-٦)(س-٦)}{س(س-٦)} \times \frac{٤(س+٦)}{-(س+٦)(س-٦)}$

المجال = ح − { ٠ ، ٦ ، −٦ }

$ن(س) = \frac{-٤}{س}$

---

③ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س^٣ - ٢٧} \times \frac{س^٢ + ٣س + ٩}{٢س + ٢}$

و أوجد ن(٣) ، ن(٠) إن أمكن

الحل

$ن(س) = \frac{(س-٣)(س+١)}{(س-٣)(س^٢+٣س+٩)} \times \frac{س^٢+٣س+٩}{٢(س+١)}$

المجال = ح − { ٣ ، −١ }

$ن(س) = \frac{١}{٢}$

ن(٣) غير معرفة لأن ٣ ∉ لمجال ن(س)

$ن(٠) = \frac{١}{٢}$

ملاحظة المعكوس الضربى للكسر $ن(س) = \frac{ن_١(س)}{ن_٢(س)}$

هو $ن^{-١}(س) = \frac{ن_٢(س)}{ن_١(س)}$

مجال $ن^{-١}(س)$ = ح − مجموعة أصفار البسط والمقام

٤ قسمة الكسور الجبرية

١ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

① $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س^٢ - ٩} \div \frac{٢س - ١٠}{س^٢ - ٦س + ٩}$

الحل

$ن(س) = \frac{(س+٣)(س-٥)}{(س-٣)(س+٣)} \div \frac{٢(س-٥)}{(س-٣)(س-٣)}$

مجال ن = ح − { ٣ ، −٣ ، ٥ }

$= \frac{(س+٣)(س-٥)}{(س-٣)(س+٣)} \times \frac{(س-٣)(س-٣)}{٢(س-٥)}$

$ن(س) = \frac{س - ٣}{٢}$

---

② $ن(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٣ - ١} \div \frac{س + ١}{س}$

الحل

$ن(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٣ - ١} \times \frac{س}{س + ١}$

$= \frac{(س-١)(س+١)}{(س-١)(س^٢+س+١)} \times \frac{س}{س+١}$

المجال = ح − { ١ ، ٠ ، −١ }

$= \frac{س}{س^٢ + س + ١}$

---

③ إذا كان $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س}{(س^٢ - ٤)}$

أوجد

① $ن^{-١}(س)$ و عين مجاله ② $ن^{-١}(١)$ ، $ن^{-١}(٢)$ إن أمكن

③ قيمة س التى تحقق أن $ن^{-١}(س) = \frac{١}{٢}$

الحل

① $ن(س) = \frac{س(س-٢)}{(س-٢)(س+٢)} = \frac{س}{س+٢}$

مجال $ن^{-١}$ = ح − { ٢ ، −٢ ، ٠ }

$ن^{-١}(س) = \frac{س+٢}{س}$

② $ن^{-١}(١) = \frac{١+٢}{١} = ٣$ ، $ن^{-١}(٢)$ غير معرفة لأن ٢ ∉ لمجال ن(س)

③ ∵ $ن^{-١}(س) = \frac{١}{٢}$ ⟸ $\frac{س+٢}{س} = \frac{١}{٢}$

⟸ ٢س + ٤ = س

⟸ ٢س − س = −٤

⟸ س = −٤

تمارين ٥

١ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

① $ن(س) = \frac{٥س}{س+٢} + \frac{١٠}{س+٢}$

② $ن(س) = \frac{س^٣ - ٩}{س - ٢} + \frac{١}{س - ٢}$

③ $ن(س) = \frac{س}{س^٢ - س} + \frac{س + ١}{س^٢ - ١}$

④ $ن(س) = \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٩} + \frac{١}{س + ٣}$

⑤ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س + ٤}{س^٣ + ٨} + \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + س - ٢}$

⑥ $ن(س) = \frac{٢س^٢ - ٦س + ١٨}{س^٣ + ٢٧} + \frac{٦س - ١٢}{س^٢ + س - ٦}$

⑦ $ن(س) = \frac{٣س + ١٥}{س^٢ + ٧س + ١٠} + \frac{٢س^٢ - ٣س - ٢}{س^٢ - ٤}$

⑧ $ن(س) = \frac{س}{س - ٥} - \frac{٥}{س - ٥}$

⑨ $ن(س) = \frac{٣}{س - ٢} - \frac{س + ١}{س^٢ - س - ٢}$

⑩ $ن(س) = \frac{٢س + ١٠}{س^٢ + ٧س + ١٠} + \frac{س - ١}{٢ - س - س^٢}$

⑪ $ن(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٣ - ١} - \frac{س - ١}{س^٢ - ١}$

⑫ $ن(س) = \frac{س^٢}{س^٢ - ١} + \frac{س}{١ - س^٢}$

⑬ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - س - ٦} - \frac{س^٢ - ٣س - ١٠}{س^٢ - ٤س - ٥}$

⑭ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{س + ٣} \times \frac{س - ١}{س^٢ - ١}$

⑮ $ن(س) = \frac{س^٢ + ٣س + ٢}{س^٢ - ٩} \times \frac{س - ٣}{س + ٢}$

⑯ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢} \times \frac{س^٢ + ٣س + ٩}{س^٣ - ٢٧}$

⑰ $ن(س) = \frac{س^٣ + س^٢}{س^٣ + ١} \times \frac{س^٢ - س + ١}{س^٢}$

⑱ $ن(س) = \frac{٣س + ٦}{س^٢ - ٤} \times \frac{س - ٢}{٢س + ٦}$

⑲ $ن(س) = \frac{س}{س - ٥} \div \frac{س - ٣}{س - ٥}$

⑳ $ن(س) = \frac{س}{س + ٢} \div \frac{س}{س^٢ - ٤}$

㉑ $ن(س) = \frac{س - ١}{س^٢ + س - ٢} \div \frac{١}{٣س + ٦}$

㉒ $ن(س) = \frac{٤س^٢ - ١}{س^٢ + ٣س + ٩} \div \frac{٢س^٢ - ٥س + ٢}{س^٣ - ٢٧}$

㉓ $ن(س) = \frac{٥}{س^٢ - ٢س - ٣} \div \frac{١}{١ - س^٢}$

㉔ $ن(س) = (س + ٢) \div \frac{س^٢ + ٥س + ٦}{٢س + ٦}$

=====================================

٢ أوجد $ن^{-١}(س)$ فى أبسط صورة وعين مجاله

① $ن(س) = \frac{س}{٥}$

② $ن(س) = \frac{س - ٢}{س}$

③ $ن(س) = \frac{س^٢ - س}{س^٢ - ٢س + ١}$

④ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٢ + ٣س - ١٠}$

=====================================

٣ إذا كانت $ن(س) = \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٥س + ٦}$

① أوجد $ن^{-١}(س)$ فى أبسط صورة وعين مجاله

② ثم أوجد $ن^{-١}(١)$ ، $ن^{-١}(٢)$ إن أمكن ذلك

③ قيمة س التى تحقق أن $ن^{-١}(س) = ٥$

=====================================

٤ أكمل ما يأتى :

① إذا كان $د(س) = \frac{س - ٣}{س + ٢}$ فإن $د^{-١}(٣) = ...$

② المعكوس الجمعي للكسر $\frac{س + ٦}{س - ١}$ هو ....

③ $ن(س) = \frac{س - ٣}{٢}$ له معكوس ضربي فى المجال.........

④ إذا كان للدالة $هـ(س) = \frac{س - ٣}{س + ٤}$ معكوس ضربى فإن مجالها = ... ، $هـ^{-١}(٢) = ...$ ، $هـ^{-١}(٣) = ...$

⑤ إذا كان $هـ(س) = \frac{٣س - ٥}{٢س}$ فإن $هـ(٠) = ...$

⑥ الكسر $\frac{٢س - ٤}{س^٢ - ١}$ يكون له معكوساً ضربياً فى المجال ....

⑦ إذا كانت $س \neq ٣$ فإن أبسط صورة للمقدار $\frac{٣ - س}{س - ٣}$ هى.....

⑧ أبسط صورة للدالة $ن(س) = \frac{س}{س - ١} + \frac{١}{١ - س} = ...$

⑨ $\frac{س - ٢}{س} + \frac{٣ + س}{٢س}$ فى أبسط صورة هى ....

⑩ مجال الدالة $د : د(س) = \frac{س - ١}{٢} \div \frac{س + ٢}{٢س}$ هو ....

⑪ إذا كان $ن(س) = \frac{١}{س - ٥}$ ، $ن^{-١}(س) = ٣$ فإن س = ...

الإحتمال

إحتمال وقوع الحدث أ = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر ف}}$

⟸ ل (أ) = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$

ملاحظات

① صفر ≤ ل (أ) ≤ ١ ⟸ ل (أ) ∈ [صفر ، ١]

② إحتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر ⟸ ل (∅) = صفر

③ إحتمال وقوع الحدث المؤكد = ١ ⟸ ل (ف) = ١

④ مجموع جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية = ١

==============================

① فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فقط و ملاحظة الوجه العلوى إحسب الإحتمالات الآتية :

(١) ظهور عدد زوجى

أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ⟸ ل(أ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(٢) ظهور عدد فردى

ب = {١ ، ٣ ، ٥} ⟸ ل(ب) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(٣) ظهور عدد أولى

جـ = {٢ ، ٣ ، ٥} ⟸ ل(جـ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(٤) ظهور عدد أقل من ٥

ء = {١،٢،٣، ٤} ⟸ ل(ء) = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

(٥) ظهور عدد أولى زوجى

و = {٢} ⟸ ل(و) = $\frac{١}{٦}$

(٦) ظهور عدد يقبل القسمة على ٣

هـ = {٣ ، ٦} ⟸ ل(هـ) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

(٧) ظهور عدد أكبر من ٦

= ∅ ⟸ ل(∅) = صفر

==============================

② صندوق يحتوى ٦ كرات حمراء ، ٥ كرات صفراء ، ٤ كرات خضراء أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

(١) حمراء = $\frac{٦}{١٥}$ = $\frac{٢}{٥}$ (٤) حمراء أو صفراء = $\frac{٦+٥}{١٥}$ = $\frac{١١}{١٥}$

(٢) زرقاء = صفر (٥) ليست حمراء = $\frac{٩}{١٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

(٣) خضراء = $\frac{٤}{١٥}$

③ سلة بها ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ الى ٣٠ سحبت بطاقة واحدة عشوائيا أوجد احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددا

① يقبل القسمة على ٥

أ = {٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٣٠} ⟸ ل(أ) = $\frac{٦}{٣٠}$ = $\frac{١}{٥}$

② يقبل القسمة على ٤

ب = {٤، ٨، ١٢، ١٦، ٢٠، ٢٤، ٢٨} ⟸ ل(ب) = $\frac{٧}{٣٠}$

③ يقبل القسمة على ٤ ، ٥

جـ = { ٢٠ } ⟸ ل (جـ) = $\frac{١}{٣٠}$

④ يقبل القسمة على ٤ أو ٥

ء = {٤، ٨، ١٢، ١٦، ٢٠، ٢٤، ٢٨، ٥، ١٠، ١٥، ٢٥، ٣٠} ⟸ ل(ء) = $\frac{١٢}{٣٠}$ = $\frac{٦}{١٥}$

==============================

④ فصل دراسى به ٤٨ طالب نجح منهم ٣٠ طالب فى التاريخ ، ٢٠ طالب فى الفلسفة ٧ طلاب فى المادتين معا فإذا أختير طالب واحد عشوائيا أوجد احتمال ان يكون الطالب المختار

(١) ناجحا فى التاريخ = $\frac{٣٠}{٤٨}$ = $\frac{٥}{٨}$

(٢) ناجحا فى الفلسفة = $\frac{٢٠}{٤٨}$ = $\frac{٥}{١٢}$

(٣) ناجحا فى المادتين معا = $\frac{٧}{٤٨}$

(٤) ناجحا فى أحد المادتين على الاقل = $\frac{٤٣}{٤٨}$

(٥) ناجحا فى التاريخ فقط = $\frac{٢٣}{٤٨}$

(٦) ناجحا فى الفلسفة فقط = $\frac{١٣}{٤٨}$

(٧) ناجحا فى أحد المادتين فقط = $\frac{٣٦}{٤٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

(٨) ناجحا فى أحد المادتين على الاكثر = $\frac{٤١}{٤٨}$

(٩) راسبا فى التاريخ = $\frac{١٨}{٤٨}$ = $\frac{٣}{٨}$

(١٠) راسبا فى الفلسفة = $\frac{٢٨}{٤٨}$ = $\frac{٧}{١٢}$

(١١) راسبا فى المادتين معا = $\frac{٥}{٤٨}$

العمليات على الأحداث

① الاتحاد: ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

② التقاطع: ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∪ ب)

③ الفرق بين حدثين:
ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)
ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

④ الحدث المكمل: ل (أ̄) = ١ − ل (أ)

ملاحظات

① حدث وقوع أ أو ب أو كلاهما أو أحدهما على الأقل ⇐ ل (أ ∪ ب)

② حدث وقوع أ و ب معاً ⇐ ل (أ ∩ ب)

③ حدث وقوع أ وعدم وقوع ب أو حدث وقوع أ فقط ⇐ ل (أ − ب)

④ عدم وقوع الحدث أ ⇐ ل (أ̄)

⑤ إذا كان أ، ب حدثان متنافيان ⇐ أ ∩ ب = ∅ ⇐ ل (أ ∩ ب) = صفر

⑥ إذا كان أ ⊂ ب ⇐ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) ⇐ ل (أ ∪ ب) = ل (ب)

⑦ ل (أ ∩ ب)̄ = ١ − ل (أ ∩ ب)
ل (أ ∪ ب)̄ = ١ − ل (أ ∪ ب)

⑧ أ ∩ أ̄ = ∅ ، أ ∪ أ̄ = ف

---

① إذا كان أ ، ب حدثين من ف وكان ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣
أوجد ل (أ ∪ ب) ، ل (ب̄) ، ل (أ − ب)

الحل

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)
= ٠,٥ + ٠,٦ − ٠,٣ = ٠,٨

ل (ب̄) = ١ − ل (ب)
= ١ − ٠,٦ = ٠,٤

ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)
= ٠,٥ − ٠,٣ = ٠,٢

===========================

② إذا كان أ ، ب حدثين من ف وكان ل (أ) = $\frac{٥}{١٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٤}$
أوجد ل (أ ∩ ب) ، ل (أ̄) ، ل (أ ∪ ب)̄

الحل

ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∪ ب)
= $\frac{٥}{١٢}$ + $\frac{١}{٢}$ − $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١}{٦}$

ل (أ̄) = ١ − ل (أ) = ١ − $\frac{٥}{١٢}$ = $\frac{٧}{١٢}$

ل (أ ∪ ب)̄ = ١ − ل (أ ∪ ب)
= ١ − $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

===========================

③ إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان ، ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٣ أوجد
① أحتمال عدم وقوع ب ② أحتمال وقوع أ فقط
③ أحتمال وقوع أحدهما على الأقل

الحل

أ ، ب حدثان متنافيان ⇐ ل (أ ∩ ب) = صفر

① أحتمال عدم وقوع ب
ل (ب̄) = ١ − ل (ب)
= ١ − ٠,٣ = ٠,٧

② أحتمال وقوع أ فقط
ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)
= ٠,٥ − صفر = ٠,٥

③ أحتمال وقوع أحدهما على الأقل
ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)
= ٠,٥ + ٠,٣ − صفر = ٠,٨

٤ إذا كان م، ب حدثين من ف حيث م ⊂ ب
ل (م) = ٠,٥ وأحتمال وقوع ب فقط = ٠,٣
أوجد أحتمال عدم وقوع ب

الحل

م ⊂ ب ⟸ ل (م ∩ ب) = ل (م) = ٠,٥
أحتمال وقوع ب فقط = ٠,٣ ⟸ ل(ب − م) = ٠,٣
ل(ب) − ل (م ∩ ب) = ٠,٣
ل(ب) − ٠,٥ = ٠,٣
(ب) = ٠,٣ + ٠,٥ = ٠,٨

أحتمال عدم وقوع ب
ل(ب′) = ١ − ل (ب) = ١ − ٠,٨ = ٠,٢

=================================

٥ إذا كان س ، ص حدثين من ف بحيث ل(س) = ٠,٥ ، ل(س ∪ ص) = ٠,٨ أوجد ل(ص) إذا كان
① س ، ص متنافيان ② س ⊂ ص

الحل

① س ، ص متنافيان
ل(س ∩ ص) = صفر
ل(س ∪ ص) = ٠,٨
ل(س) + ل(ص) = ٠,٨
٠,٥ + ل(ص) = ٠,٨
ل(ص) = ٠,٨ − ٠,٥ = ٠,٣

② س ⊂ ص
ل(س ∪ ص) = ل(ص)
ل(ص) = ٠,٨

=================================

٦ إذا كان م ، ب حدثين من ف وكان ل (ب) = ١/١٢
ل (م ∪ ب) = ١/٣ ، ل(م) = س
أوجد س إذا كان ① م ، ب متنافيان ② ل (م ∩ ب) = ١/٦

الحل

ل (م ∪ ب) = ١/٣
ل (م) + ل (ب) − ل (م ∩ ب) = ١/٣
س = ١/٣ − ل (ب) + ل (م ∩ ب)

① م ، ب حدثان متنافيان ⟸ ل (م ∩ ب) = صفر
س = ١/٣ − ١/١٢ + صفر = ١/٤

② ل (م ∩ ب) = ١/٦
س = ١/٣ − ١/١٢ + ١/٦ = ٥/١٢

تمارين ٦

١ صندوق به ١٥ كرة ٨ كرات حمراء ، ٣ كرات بيضاء وباقي الكرات خضراء سحبت كرة واحدة عشوائياً
أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :
① حمراء ② بيضاء أو خضـــراء
③ ليست بيضاء ④ حمراء و بيضاء معاً

=================================

٢ سحبت بطاقة عشوائياً من ٢٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٢٠
احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً :
① يقبل القسمة على ٣ ③ يقبل القسمة على ٣ و ٥
② يقبل القسمة على ٥ ④ يقبل القسمة على ٣ أو ٥

=================================

٣ فصل دراسى به ٤٠ تلميذاً منهم ١٨ تلميذ يقرأون جريدة الأخبار ، ١٥ تلميذ يقرأون جريدة الأهرام، ٨ تلاميذ يقرأون الجريدتين معاً فإذا اختير تلميذ عشوائياً من هذا الفصل **احسب** احتمال أن يكون التلميذ :
① يقرأ جريدة الأخبار ② لا يقرأ جريدة الأخبار
③ يقرأ الجريدتين معاً ④ يقرأ جريدة الأخبار فقط
⑤ يقرأ جريدة الأهرام فقط ⑥ يقرأ جريدة الأخبار أو الأهرام

=================================

٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة وكان :
ل (أ) = ١/٢ ، ل (ب) = ٢/٣ ، ل (أ ∩ ب) = ١/٣ **فأوجد** ل (أ ∪ ب)

=================================

٥ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة وكان :
ل (أ) = ٣/٨ ، ل (ب) = ١/٢ ، ل (أ ∪ ب) = ٥/٨
فأوجد ① ل (أ ∩ ب) ② ل (أ′) ③ ل (أ − ب)

=================================

٦ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة وكان :
ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب′) = ٠,٦ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨
فأوجد : ① ل (أ′) ② ل (أ ∩ ب) ③ ل (أ − ب)

=================================

٧ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة وكان :
ل (أ) = ١/٢ ، ل(ب) = ١/٣ **فأوجد** ل (أ ∪ ب) فى الحالات الآتية
① ل (أ ∩ ب) = ١/٨ ② أ ، ب حدثان متنافيان ③ ب ⊂ أ

=================================

٨ كيس به ١٢ كرة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ١٢ سحبت منه كرة عشوائياً فإذا كان أ هو "الحصول على عدد فردى" والحدث ب هو "الحصول على عدد أولى" **فأوجد :**
ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أ′) ، ل (أ ∪ ب) ، ل (أ − ب)

=================================

٩ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين وكان
ل (أ) = ١/٨ ، ل (ب) = ٣/٨
فأوجد ① ل (أ ∪ ب) ② ل (أ − ب)
③ ل (أ′) ④ ل (أ ∩ ب)′

(١٠) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان

ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ ، ل (أ) = ٠,٤ ، ل (أ − ب) = ٠,٣ **فأوجد :**

① ل (أَ) ② ل (أ ∩ ب) ③ ل (ب − أ)

---

(١١) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان

ل (أ) = $\frac{٣}{١٠}$ ، ل (ب) = $\frac{٣}{٥}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٥}$ **فأوجد :**

① احتمال وقوع ب وعدم وقوع أ ② احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

① احتمال وقوع الحدث أ فقط ② احتمال عدم وقوع الحدث أ

---

(١٢) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان

ل (أَ) = ٣ ل (أ) ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٨}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٤}$ **فأوجد :** ل (ب) ، ل (أ − ب)

---

(١٣) اكمل مكان النقط

① احتمال الحدث المستحيل = ...

② احتمال الحدث المؤكد = ...

③ إذا القى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد أقل من أو يساوى ٤ هو ....

④ القى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإذا كان أ هو حدث ظهور عدد أولى ، ب هو حدث ظهور عدد فردى فإن ل (أ ∩ ب) = ...

⑤ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن ل (أ ∩ ب) = ...

⑥ إذا كان أ ⊃ ب فإن ل (أ ∪ ب) = ...

⑦ إذا كان أ ، ب حدثين من ف حيث ب ⊃ أ فإن ل (أ ∪ ب) = ...

⑧ إذا ألقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة = ...

⑨ ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$, ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$ فإن ل (أ ∪ ب) = ...

⑩ اذا كان احتمال وقوع الحدث أ هو ٦٥ ٪ فان احتمال عدم وقوعه = ...

⑪ اذا كان ل (أ) = ل (أَ) فان ل (أ) = ...

⑫ إذا القي حجر نرد منتظم مرة واحدة ، فإن احتمال ظهور عدد زوجي أولي علي الوجه العلوي= ....

⑬ إذا القي حجر نرد مرة واحدة ، فإن احتمال ظهور عدد زوجي وعدد فردي معا = ...

⑭ ل (أ) + ل (أَ) = ...

⑮ اذا كان أ ⊃ ب فان ل(أ − ب) = ...

⑯ إذا كان : أ، ب حدثين متنافيين ل(أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ فإن ل (ب) = ...

⑰ إذا كان ل (أ) = ٤ ل (أَ) فإن : ل (أ) = ...

⑱ في تجربة إلقاء حجر نرد منتم مرة واحدة ، فإن احتمال ظهور عدد أكبر من ٦ = ...

⑲ إذا كان : ل(أ) = ٠,٢ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ فإن : ل(ب) = ...

⑳ لأي حدثين هـ، ء في تجربة عشوائية يكون (هـ − ء) ∪ (هـ ∩ ء) = ...

الامتياز
فى
الرياضيات
الصف
الثالث
الاعدادى
جبر و هندسة
2019
إعداد
ا\عبدالمقصود حنفى
ت\ ٠١٠٦٧٣٣٦٣١٥
www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة
الترم الثانى

تعاريف و مفاهيم أساسية

(١) الدائرة

هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بُعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة فى المستوى و هذه النقطة تسمى مركز الدائرة و يسمى البعد الثابت (طول نصف قطر الدائرة)

(٢) نصف القطر

هو قطعة مستقيمة طرفاها مركز الدائرة و أى نقطة على الدائرة مثل

م‍أ ، م‍ب ، م‍ج

ملحوظة

أنصاف أقطار الدائرة الواحدة متساوية فى الطول

(٣) الوتر

هو قطعة مستقيمة تصل بين أى نقطتين على الدائرة مثل أ‍ج

(٤) القطر

هو قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة و تمر بمركز الدائرة

- هو وتر يمر بمركز الدائرة
- هو أكبر أوتار الدائرة طولاً مثل أ‍ب

تجزئة المستوى

الدائرة تقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط

نقط داخل الدائرة مثل ج

نقط خارج الدائرة مثل ب

نقط على الدائرة مثل أ

سطح الدائرة

هومجموعة نقط الدائرة ∪ مجموعة النقط داخل الدائرة

أ‍ب (مستقيم) ∩ الدائرة = { أ ، ب }

أ‍ب (مستقيم) ∩ سطح الدائرة = أ‍ب

التماثل فى الدائرة

أى مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها

أى أن الدائرة لها عدد لانهائى من محاور التماثل

نتائج هامة

نتيجة ١ : المستقيم المار بمركز الدائرة و بمنتصف أى وتر فيها يكون عمودياًعلى هذا الوتر

نتيجة ٢ : المستقيم المار بمركز الدائرة عمودياً على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر

نتيجة ٣ : المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يمر بمركز الدائرة

م‍ج ⊥ أ‍ب

م‍ج ينصف أ‍ب

م‍ج يمر بمركز الدائرة

( ) في الشكل المقابل
ء ، هـ منتصفى $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ ، ق(∠أ) = ٨٠°
أوجد ق(∠ء م هـ)

البرهان

∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أب}$
∴ ق(∠أ ء م) = ٩٠°
∵ هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أجـ}$
∴ ق(∠أ هـ م) = ٩٠°
∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠°
فى الشكل الرباعى أ ء م هـ
ق(∠ء م هـ) = ٣٦٠° - (٩٠ + ٩٠ + ٨٠) = ١٠٠°

==============================

(٢) فى الشكل المقابل
$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م ، $\overline{بجـ}$ قطر فيها
، ء منتصف $\overline{أب}$
اثبت أن
ء م // $\overline{أجـ}$ ثم احسب ق(∠أ)

البرهان

∵ م مركز الدائرة
∴ م منتصف القطر $\overline{بجـ}$
، ء منتصف $\overline{أب}$
∴ $\overline{ءم}$ // $\overline{أجـ}$
∵ ء منتصف $\overline{أب}$
∴ $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أب}$
∴ ق(∠ب ء م) = ٩٠°
∴ ق(∠أ) = ق(∠ب ء م) = ٩٠° بالتناظر

(٣) فى الشكل المقابل
ق(∠أ) = ١٢٠°
س ، ص منتصفى $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$
اثبت أن ء هـ = نق

البرهان

∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أب}$
∴ ق(∠أ س م) = ٩٠°
∵ ص منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{أجـ}$
∴ ق(∠أ ص م) = ٩٠°
∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠°
فى الشكل الرباعى أ س م ص
ق(∠س م ص) = ٣٦٠ - (٩٠ + ٩٠ + ١٢٠) = ٦٠°
ق(∠هـ م ء) = ق(∠س م ص) = ٦٠° بالتقابل بالرأس
فى Δ م هـ ء
∵ م هـ = م ء = نق
∴ ق(∠هـ) = ق(∠ء) = $\frac{١٨٠ - ٦٠}{٢}$ = ٦٠°
∴ Δ م هـ ء متساوى الأضلاع
∴ هـ ء = م هـ = م ء = نق

==============================

(٥) فى الشكل المقابل
دائرتان متحدتا المركز ،
$\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أب}$
اثبت أن أجـ = ب ء

البرهان

فى الدائرة الكبرى
∵ $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ هـ منتصف $\overline{أب}$
∴ أهـ = هـ ب ⟸ (١)
فى الدائرة الصغرى
∵ $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{جـ ء}$ ∵ هـ منتصف $\overline{جـ ء}$
∴ جـ هـ = هـ ء ⟸ (٢)
بطرح ٢ من ١ ⟸ أجـ = ب ء

أ/ عبدالمقصود حنفى
ت/ ٠١٠٦٧٣٣٦٣١٥

تمارين ١

(١) فى الأشكال التالية أختر الإجابة الصحيحة

١) إذا كان : ق (∠أ م حـ) = ٤٠°، حـ منتصف أ ب

فإن : ق (∠م أ حـ) = ... °

[٤٠ ، ٤٥ ، ٥٠ ، ٩٠]

٤ إذا كان : أ ب = ٨ سم ، م حـ = ٣ سم

فإن : نق = ... سم [٤ ؛ ٥ ؛ ٦ ؛ ٨]

=====================================

٢) إذا كان : ق (∠أ م ب) = ٦٠°

فإن : ق (∠م أ ب) = ... °

=====================================

٣) إذا كان : ء ، هـ منتصفى أ ب ، أ حـ ، ق (∠ء م هـ) = ١١٠°

فإن : ق (∠ء أ هـ) = ... °

[١١٠ ؛ ٥٥ ؛ ٧٠ ؛ ٩٠]

=====================================

(٢) فى الشكل المقابل : أ ب وتر في الدائرة م

، م س ⊥ أ ب

فإذا كان طول نصف قطر الدائرة = ٥ سم ، س ء = ٢ سم

أوجد طول أ ب

=====================================

(٣) فى الشكل المقابل

ء ، هـ منتصفى أ ب ، أ حـ

، ق (∠ب أ حـ) = ٤٥°

فإذا كان م هـ ∩ أ ب = { و }

أثبت أن المثلث م ء و متساوى الساقين

=====================================

(٤) فى الشكل المقابل :

دائرتان متحدا المركز م

، طول نصفى قطريهما ١٣ سم ، ٢٠سم

م هـ = ١٢ سم

، م هـ ⊥ أ ب أوجد طول ب ء

(٥) فى الشكل المقابل

أ ب وتر فى الدائرة م ،

أ جـ ينصف (∠ب أ م)،

ء منتصف أ ب ،

ق(∠أ م جـ) = ١٥٠°

اثبت أن م ء ⊥ م جـ

=====================================

(٦) فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ،

م ص ⊥ أ جـ ،

م س ⊥ أ ب

ق(∠أ) = ٦٠°

ق(∠ب) = ٧٠°

أوجد

ق(∠س م ص)

=====================================

(٧) فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز ،

م هـ ⊥ أ ب

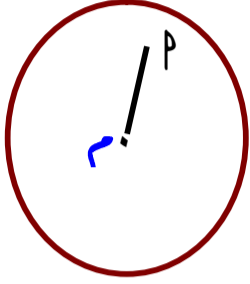
اثبت أن

أ جـ = ب ء

=====================================

وضع نقطة و مستقيم و دائرة بالنسبة لدائرة

أولاً موضع نقطة بالنسبة للدائرة

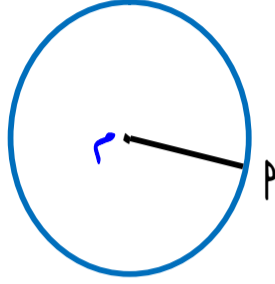
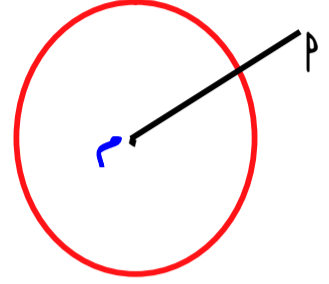
إذا كانت دائرة م ، طول نصف قطرها نق ، أ نقطة في مستوى الدائرة فإن :

أ تقع خارج الدائرة م

إذا كان : م أ > نق

أ تقع على الدائرة م

إذا كان : م أ = نق

أ تقع داخل الدائرة م

إذا كان : م أ < نق

١) م دائرة طول قطرها ٦ سم ، أ نقطة فى مستوى الدائرة ، حدد موضع نقطة أ بالنسبة للدائرة إذا كان :

١ م أ = ٦ سم أ ......خارج...... الدائرة

٣ م أ = ٢ سم أ ......داخل...... الدائرة

٢ م أ = ٣ سم أ ......على...... الدائرة

٤ م أ = صفر سم أ ......داخل...... الدائرة

ثانياً موضع مستقيم بالنسبة للدائرة

إذا كان ل مستقيم فى مستوى الدائرة م ، $\overleftarrow{\text{م أ}}$ ⊥ ل فإن أوضاع المستقيم ل هى :

ل يقع خارج الدائرة م

م أ > نق

المستقيم ل ∩ الدائرة م = ∅

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = ∅

المستقيم ل مماس للدائرة

م أ = نق

المستقيم ل ∩ الدائرة م = { أ }

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = { أ }

قاطع
ب
م
أ
جـ
ل

ل يقطع الدائرة م

م أ < نق

المستقيم ل ∩ الدائرة م = { ب ، جـ }

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{ب جـ}}$

٢) م دائرة طول نصف قطرها ٤ سم ، ل مستقيم فى مستوى الدائرة م ، $\overleftarrow{\text{م أ}}$ ⊥ ل، حدد موضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة إذا كان :

١ م أ = ٢ سم ل......قاطع...... الدائرة

٣ م أ = ٥ سم ل......خارج...... الدائرة

٢ م أ = ٤ سم ل......مماس...... الدائرة

٤ م أ = صفر سم ل......قاطع...... الدائرة

حقائق هامة

١ المماس للدائرة يكون عموديا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس

٢ المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماسا لها

٣ المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها يكونان متوازيان

(١) فى الشكل المقابل

هـ ى مماس للدائرة م عند هـ ، جـ منتصف أب ، ق(∠م)= ١١٠° ، أوجد ق(∠ى)

البرهان

∵ ى هـ مماس للدائرة م ، م هـ نصف قطر

∴ م هـ ⊥ ى هـ ⇐ ق(∠ى هـ م)= ٩٠°

∵ جـ منتصف أب

∴ م جـ ⊥ أب ⇐ ق(∠أ جـ م)= ٩٠°

فى الشكل الرباعى هـ م جـ ى

ق(∠ى)= ٣٦٠ – (٩٠+٩٠+١١٠)= ٧٠°

(٢) فى الشكل المقابل

أب مماس للدائرة م ، أم = ٨ سم ، ق(∠ب) = ٣٠° ، أجـ ⊥ م ب ، أوجد طول أب

البرهان

∵ أب مماس للدائرة م ، م أ نصف قطر

∴ م أ ⊥ أب ⇐ ق(∠م أب) = ٩٠°

فى Δ أ م ب القائم فى أ ، ق(∠ب) = ٣٠°

∴ أ م = $\frac{١}{٢}$ ب م ⇐ ب م = ١٦ سم

فى Δ أ ب م القائم الزاوية فى أ

$(أب)^٢ = (ب م)^٢ – (أ م)^٢$

$(أب)^٢ = (١٦)^٢ – (٨)^٢ = ١٩٢$

∴ أب = $\sqrt{١٩٢}$ = ٨ $\sqrt{٣}$ سم

(٣) فى الشكل المقابل

ب ص مماس للدائرة م عند ب ، أب // م جـ ، ق(∠أ ب ص)= ٥٠° ، أوجد ق(∠م جـ ب)

البرهان

∵ ب ص مماس للدائرة م ، م ب نصف قطر

∴ م ب ⊥ ب ص ⇐ ق(∠م ب ص)= ٩٠°

∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠ – ٥٠ = ٤٠°

∵ أب // م جـ

∴ ق(∠أ ب م) = ق(∠م) = ٤٠° بالتبادل

∵ م ب = م جـ = نق

∴ Δ م ب جـ متساوى الساقين

∴ ق(∠م ب جـ) = ق(∠م جـ ب) = ٧٠°

(٤) فى الشكل المقابل

أ م = أ جـ = ب جـ

اثبت أن

ب أ مماس للدائرة م عند أ

البرهان

∵ أ م = ب جـ

∴ أ م = م جـ = نق

∴ م جـ = ب جـ ⇐ جـ منتصف ب م

∴ أ جـ متوسط فى Δ أ ب م

أ جـ = $\frac{١}{٢}$ ب م

∴ ق(∠ب أ م) = ٩٠°

∴ ب أ مماس للدائرة م عند أ

ثالثاً موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى

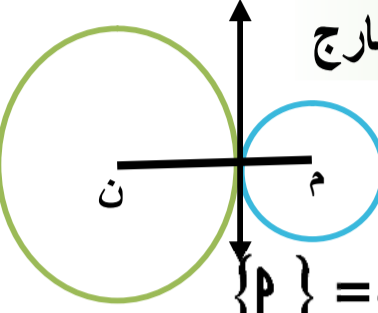
١ الدائرتان متباعدتان

م ن > نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

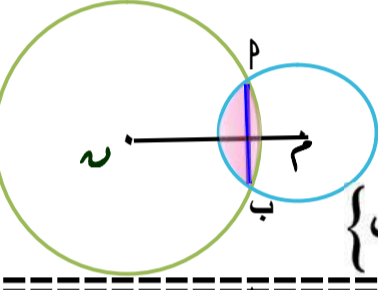
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ∅

٢ الدائرتان متماستان من الخارج

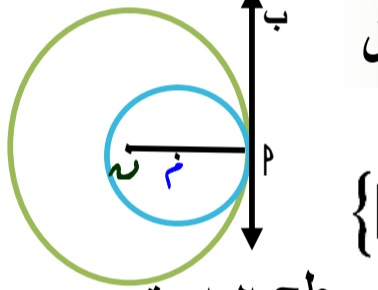
م ن = نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ }

٣ الدائرتان متقاطعتان

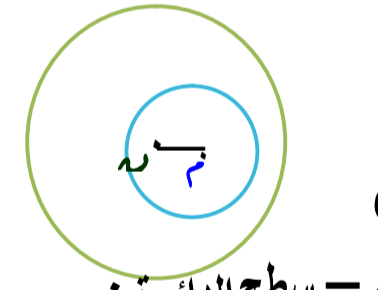
نق١ − نق٢ < م ن < نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

٤ الدائرتان متماستان من الداخل

م ن = نق١ − نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

٥ الدائرتان متداخلتان

م ن < نق١ − نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

٦ الدائرتان متحدتا المركز

م ن = صفر

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

نتائج هامة

١ خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس و يكون عمودياً على المماس المشترك

٢ خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك و ينصفه

---

١ م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٧ سم ، ٣سم حدد وضع الدائرتين فى كل حالة مما يأتى :

(١) م ن = ٤ سم الدائرتان .... متماستان من الداخل

(٢) م ن = ١٠ سم الدائرتان .... متماستان من الخارج

(٣) م ن = ١٢ سم الدائرتان .... متباعدتان

(٤) م ن = ٨ سم الدائرتان .... متقاطعتان

(٥) م ن = ٢ سم الدائرتان .... متداخلتان

(٦) م ن = صفر الدائرتان .... متحدتا المركز

(٧) سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ∅ الدائرتان .... متباعدتان

(٨) سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ } الدائرتان .... متماستان من الخارج

(٩) الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ } الدائرتان .... متماستان من الخارج او متماستان من الداخل

(١٠) الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅ الدائرتان .... متباعدتان او متداخلتان

(١١) سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن الدائرتان .... متداخلتان او متماستان من الداخل

(١٢) الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب } الدائرتان .... متقاطعتان

---

٢ في الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

ق(∠ أ م ن) = ٣٠°

أثبت أن △ أ ب م متساوى الأضلاع

البرهان

∵ م ن خط المركزين ، أ ب وتر مشترك

∴ م ن ⊥ أ ب ∴ ق(∠ أ ء م) = ٩٠°

∴ ق(∠ م أ ء) = ١٨٠ − (٩٠ + ٣٠) = ٦٠°

∵ م أ = م ب " أنصاف أقطار "

∴ △ أ ب م متساوى الأضلاع

تمارين ٢

(١) دائرة م طول نصف قطرها ٥ سم ، أ نقطة فى مستويها فأكمل ما يلى :

١ إذا كان : م أ = ٦ سم فإن : أ تقع .... الدائرة
٢ إذا كان : م أ = ٥ سم فإن : أ تقع .... الدائرة
٣ إذا كان : م أ = ٣ سم فإن : أ تقع .... الدائرة
٤ إذا كان : م أ = صفر فإن : أ تقع .... الدائرة

==========================

(٢) دائرة م طول نصف قطرها ٥ سم ، م أ ⊥ ل ، أ ∈ ل فأكمل ما يلى :

١ إذا كان : م أ = ٦ سم فإن : المستقيم ل ....
٢ إذا كان : م أ = ٥ سم فإن : المستقيم ل ....
٣ إذا كان : م أ = ٣ سم فإن : المستقيم ل ....
٤ إذا كان : م أ = $\frac{٢}{٥}$ نق سم فإن ل يقع .... الدائرة
٥ إذا كان : م أ = نق سم فإن ل يسمى .... للدائرة
٦ إذا كان : م أ = $\frac{٩}{٥}$ نق سم فإن ل يسمى .... للدائرة
٧ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = ϕ فإن ل يكون .... الدائرة
٨ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = {س} فإن ل يكون .... الدائرة

==========================

(٣) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٣ سم على الترتيب فأكمل ما يلى :

١ إذا كان : م ن = ٦ سم فإن : الدائرتان ....
٢ إذا كان : م ن = ٢ سم فإن : الدائرتان ....
٣ إذا كان : م ن = ٨ سم فإن : الدائرتان ....
٤ إذا كان : م ن = ١ سم فإن : الدائرتان ....
٥ إذا كان : م ن = ٩ سم فإن : الدائرتان ....
٦ إذا كان : م ن = صفر فإن : الدائرتان ....

==========================

(٤) فى الشكل المقابل :

دائرة مركزها م ، ق(∠ حـ) = ٤٠° ، ق(∠ م أ ب) = ٦٥°

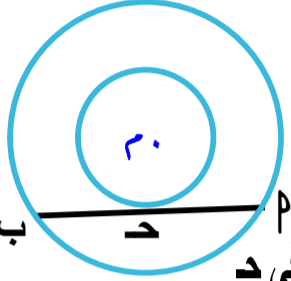
أثبت أن

ب حـ مماس للدائرة م

(٥) فى الشكل المقابل :

ص س مماس للدائرة ن عند س ، ق(∠ ع) = ٣٥°

أوجد ق(∠ س ص ع)

==========================

(٦) فى الشكل المقابل :

دائرتان متحدتا المركز م طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٣ سم

أ ب وتر فى الدائرة الكبرى يمس الدائرة الصغرى فى حـ

أوجد طول أ ب

==========================

(٧) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، حـ ∈ س ص ، س ص تمس الدائرة م عند حـ

أثبت أن

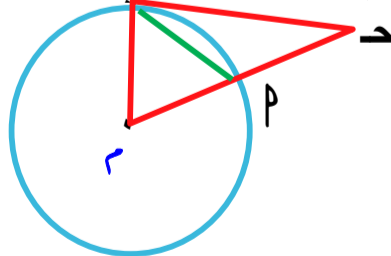
١ أ ب // س ص
٢ حـ منتصف س ص

==========================

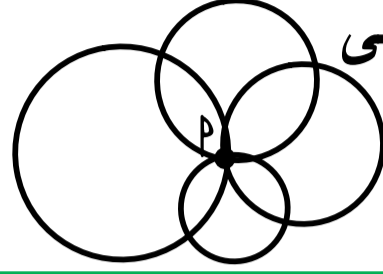
(٨) فى الشكل المقابل :

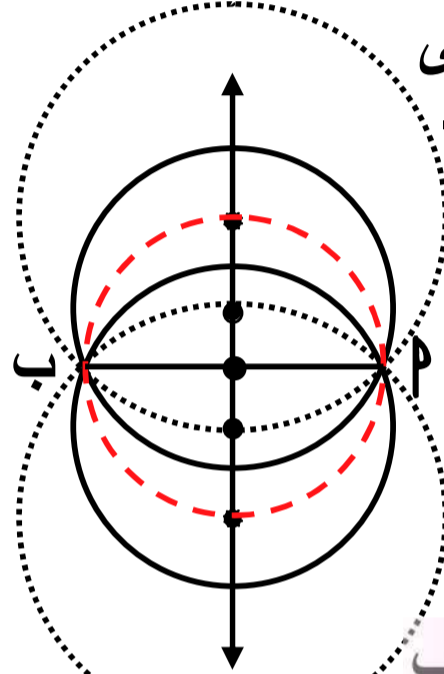
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب
هـ منتصف حـ و
ق(∠ب ص حـ) = ٥٣°

أوجد ق(∠ ء م هـ)

==========================

ملاحظات هامة

تعيين الدائرة إذا علم مركزها و طول نصف قطرها

أولاً رسم دائرة تمر بنقطة معلومة

يمكن رسم عدد لانهائى من الدوائر تمر بنقطة معلومة

ثانياً رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين

يمكن رسم عدد لانهائى من الدوائر تمر بالنقط ٲ ، ب مراكزها جميعاً تقع على محور ٲب

١) إذا كان: نق > ½ ٲ ب فإنه يمكن رسم دائرتين

٢) إذا كان: نق = ½ ٲ ب فإنه يمكن رسم دائرة واحدة، وهى أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطتين ٲ، ب تكون ٲ ب قطـــرا فيها

٣) إذا كان: نق < ½ ٲ ب فإنه لا يمكن رسم دائرة

ثالثاً رسم دائرة تمر بثلاث نقط معلومة

١) أى ثلاث نقاط لا تنتمى لمستقيم واحد يمر بها دائرة وحيدة

٢) لا يمكن رسم دائرة تمر بثلاث نقط تنتمى لمستقيم واحد

٣) الدائرة المارة برؤوس مثلث تسمى دائرة خارجة لهذا المثلث

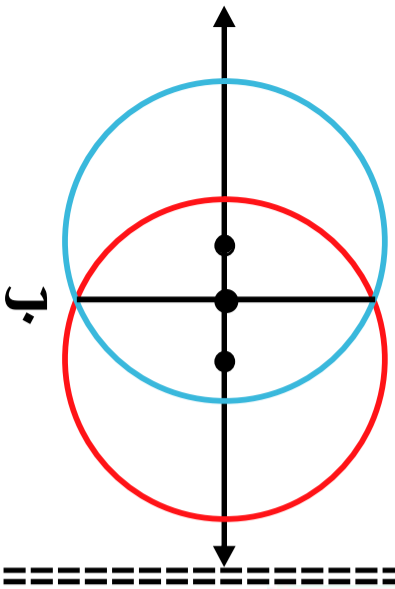
٤) مركز الدائرة الخارجة للمثلث هى نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها أو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه

وتقع هذه النقطة ١) داخل المثلث الحاد الزوايا ٢) خارج المثلث المنفرج الزاوية ٣) فى منتصف وتر المثلث القائم الزاوية

٥) مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه_ متوسطاته_ منصفات زواياه الداخلة_ إرتفاعاته

تعيين الدائرة

مثال (١) باستخدام الأدوات الهندسية

ارسم ٲب طولها ٦ سم

ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٤سم

(كم عدد الحلول)

عدد الحلول = ٢

==================================

تمارين ٣

س١ أكمل ما يلى :

١) عدد الدوائر المارة بنقطة معلومة ٠٠٠٠٠

٢) عدد الدوائر المارة بطرفى قطعة مستقيمة ٠٠٠٠

٣) عدد الدوائر المارة بثلاث نقط لا تنتمى لمستقيم واحد ٠٠٠٠

٤) عدد الدوائر المارة بثلاث نقط تنتمى لمستقيم واحد ٠٠٠٠

٥) جميع الدوائر المارة بالنقطتين س، ص تقع جميع مراكزها على ٠٠٠٠

٦) إذا كان △س ص ع قائم الزاوية فى ص فإن مركز الدائرة المارة برؤوسه هو ٠٠٠٠

٧) مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث هو نقطة تقاطع ٠٠٠٠

٨) طول نصف قطر أصغر دائرة مارة بطرفى قطعة مستقيمة طولها ٦سم هو ٠٠٠٠

٩) لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠

١٠) عدد الدوائر التى طول نصف قطرها نق و تمر بطرفى قطعة مستقيمة ٲب طولها ١٠سم يكون :

إذا كان نق = ٥ سم ٠٠٠٠٠٠٠٠٠

إذا كان نق = ٧ سم ٠٠٠٠٠٠٠٠٠

إذا كان نق < ٥ سم ٠٠٠٠٠٠٠٠٠

س٢ ارسم ٲ ب طولها ٥سم ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٣ سم (كم عدد الحلول)

س٣ △ ٲ ب حـ فيه : ٲ ب = ٤سم ، ب حـ = ٥سم ، ٲ حـ = ٣سم ، إرسم الدائرة الخارجة عنه

علاقة أوتار الدائرة بمركزها

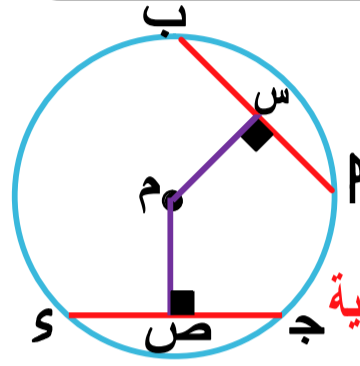
ملاحظة

بعد الوتر عن مركز الدائرة هو طول العمود المرسوم عليه من مركز الدائرة

نظرية ١

الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة

∵ م س ⊥ أ ب

∵ م ص ⊥ جـ ء

∵ أ ب = جـ ء أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية

عكس نظرية ١

إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من مركز الدائرة فإنها تكون متساوية فى الطول

نتيجة

فى الدوائر المتطابقة الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة

---

(١) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، س ، ص منتصفى أ ب ، أ جـ

أثبت أن ء س = هـ ص

البرهان

∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

∵ ص منتصف أ جـ ∴ م ص ⊥ أ جـ

∵ أ ب = جـ ء أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية ①

∵ م ء = م هـ = نق ②

بطرح ١ من ٢

∴ ء س = هـ ص

(٢) فى الشكل المقابل

ء، هـ منتصفى أ ب ، أ جـ

ق(∠ أ) = ٤٠°

ق(∠ ب) = ٧٠°

أثبت أن م ء = م هـ

البرهان

فى Δ أ ب جـ

∵ ق(∠ جـ) = ١٨٠ − (٧٠ + ٤٠) = ٧٠°

∴ ق(∠ جـ) = ق(∠ ب)

∴ أ ب = أ جـ أوتار متساوية ①

∵ ء منتصف أ ب ∴ م ء ⊥ أ ب ②

∵ هـ منتصف أ جـ ∴ م هـ ⊥ أ جـ ③

من ١ ، ٢ ، ٣ ∴ م ء = م هـ أبعاد متساوية

---

(٣) فى الشكل المقابل

أ ب = جـ ء ، س، ص منتصفى أ ب ، جـ ء

أثبت أن ق(∠ أ س ص) = ق(∠ جـ ص س)

البرهان

∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

∴ ق(∠ م س أ) = ٩٠°

∵ ص منتصف أ جـ ∴ م ص ⊥ أ جـ

∴ ق(∠ م ص جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ م س أ) = ق(∠ م ص جـ) = ٩٠° ①

∵ أ ب = جـ ء أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية

∴ ق(∠ م س ص) = ق(∠ م ص س) ②

بطرح ٢ من ١

∴ ق(∠ أ س ص) = ق(∠ جـ ص س)

(٤) فى الشكل المقابل

م س = م ء ، ن ء = ن ص

ن ص ⊥ هـ و

، س منتصف جـ ب

أثبت أن ب جـ = هـ و

البرهان

∵ م ن خط المركزين ، أ ب وتر مشترك

∴ م ن ⊥ أ ب

∵ ن ء ⊥ أ ب ، م ء ⊥ أ ب

∵ س منتصف جـ ب ∴ م س ⊥ ب جـ

∵ م س = م ء أبعاد متساوية

∴ ب جـ = أ ب أوتار متساوية (١)

∵ ن ص ⊥ هـ و

∵ ن ء = ن ص أبعاد متساوية

∴ أ ب = هـ و أوتار متساوية (٢)

من ١ ، ٢ ∴ ب جـ = هـ و

(٥) فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ،

أ ب = أ جـ

م و ⊥ أ ب

، م ع ⊥ أ جـ ،

أثبت أن

ء هـ = س ص

فى الدائرة الكبرى

∵ م و ⊥ أ ب

∵ م ع ⊥ أ جـ

∵ أ ب = أ جـ أوتار متساوية

∴ م و = م ع أبعاد متساوية

فى الدائرة الصغرى

∵ م و = م ع أبعاد متساوية

∴ ء هـ = س ص أوتار متساوية

تمارين ٤

س١ أكمل ما يلى :

١ م دائرة ، س منتصف أ ب ، ص منتصف جـ ء ، ق (∠ أ س ص) = ٥٠° ، أ ب = جـ ء فإن :

ق (∠ س م ص) = ... °

٢ دائرة م ، ء منتصف أ ب ، هـ منتصف جـ ء ، ق (∠ أ) = ٥٠°

فإن: ق (∠ ء م هـ) = ... °

٣ دائرة م ، أ ب = أ جـ ، ء منتصف أ ب ، هـ منتصف جـ ء ، ق (∠ ء أ هـ) = ٦٠°

ق (∠ ء م أ) = ... °

٤ دائرة م ، أ ب = أ جـ ، ء م = س + ٢ سم ، هـ م = ٦ سم ، فإن س = ...

٥ الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على ....مركز الدائرة

٦ إذا كانت الأوتارعلى أبعاد متساوية من مركز الدائرة فإنها تكون ....

(٢) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{م هـ}}$ ، ق(∠أب حـ) = ق(∠أحـ ب) $\perp$ $\overline{\text{أ حـ}}$

، ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ،

أثبت أن :

م ء = م هـ

==================================

(٣) فى الشكل المقابل :

دائرتان متحدا المركز م ، $\overline{\text{أ ب}}$ ؛ $\overline{\text{حـ ء}}$ وتران

في الدائرة الكبرى يمسان الدائرة الصغرى في س ، ص على الترتيب

أثبت أن : أ ب = حـ ء

==================================

(٤) فى الشكل المقابل

$\overline{\text{ب جـ}}$ قطر فى الدائرة م

$\overline{\text{م س}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ ب}}$

، $\overline{\text{م ص}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ حـ}}$

ب ء = جـ هـ أثبت أن : أ ب = أ جـ

==================================

(٥) فى الشكل المقابل

ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

م ء = م هـ

ق(∠ء م هـ) = ١٢٠°

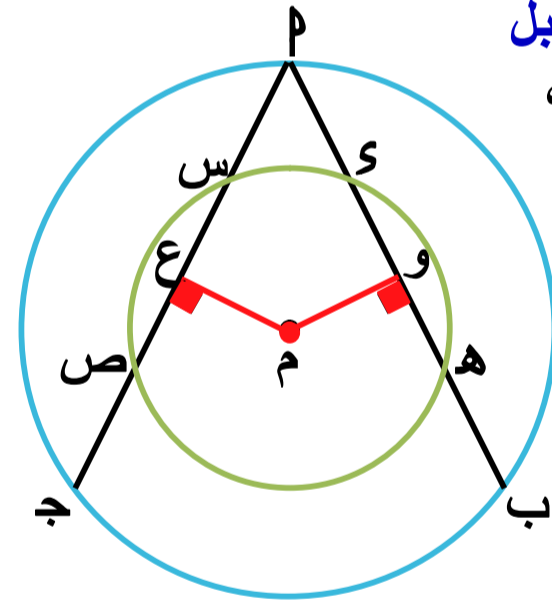
==================================

(٦) فى الشكل المقابل

ب جـ = ء هـ ، $\overline{\text{م س}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب جـ}}$

$\overline{\text{م ص}}$ $\perp$ $\overline{\text{ء هـ}}$

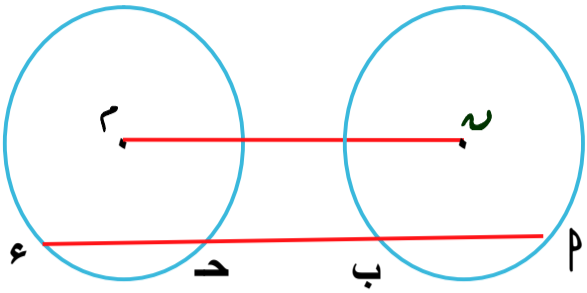
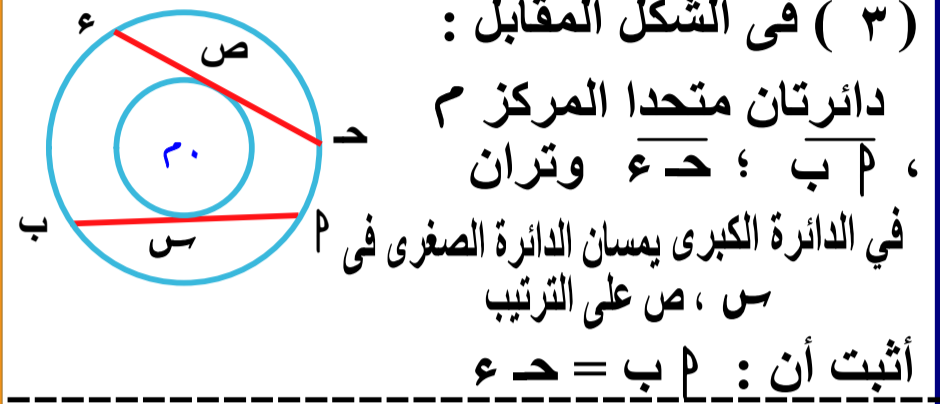
اثبت أن

أب = أ ء

(٧) فى الشكل المقابل :

دائرتان م ، ن متطابقتان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$

أثبت أن :

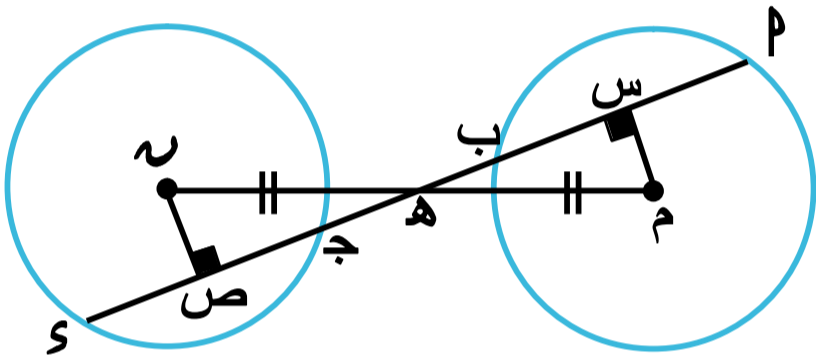
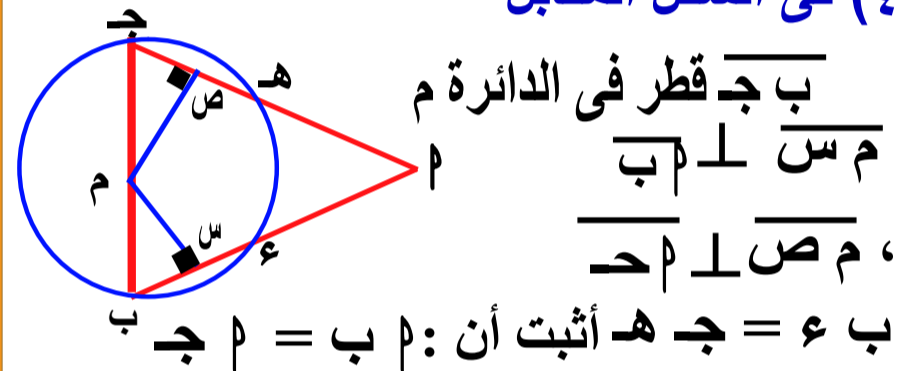
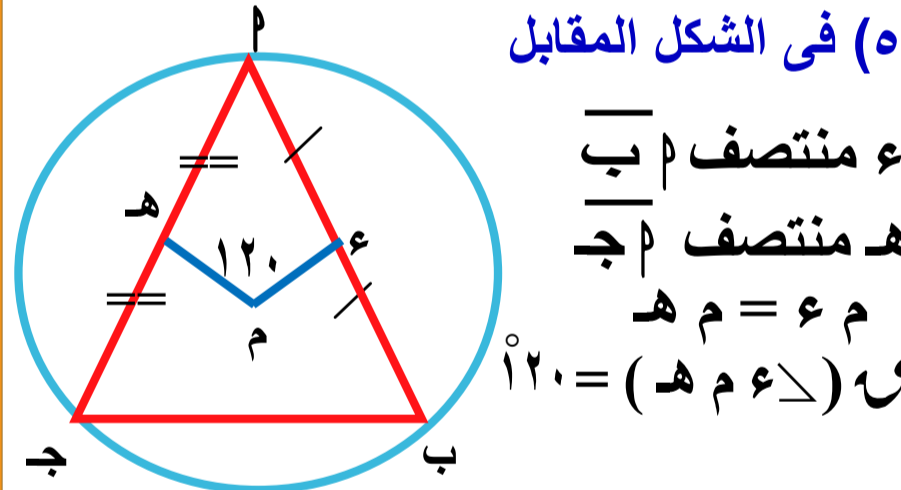
أ حـ = ب ء

==================================

(٨) فى الشكل المقابل

م، ن دائرتان متطابقتان و متباعدتان

، هـ منتصف $\overline{\text{م ن}}$ ، اثبت أن أب = جـ ء

، هـ منتصف $\overline{\text{أ ء}}$

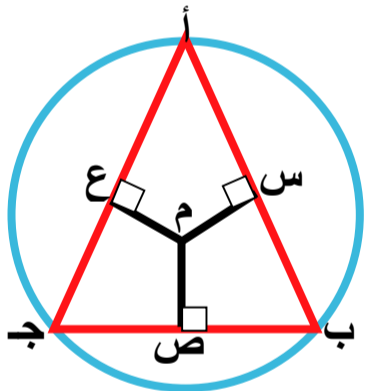
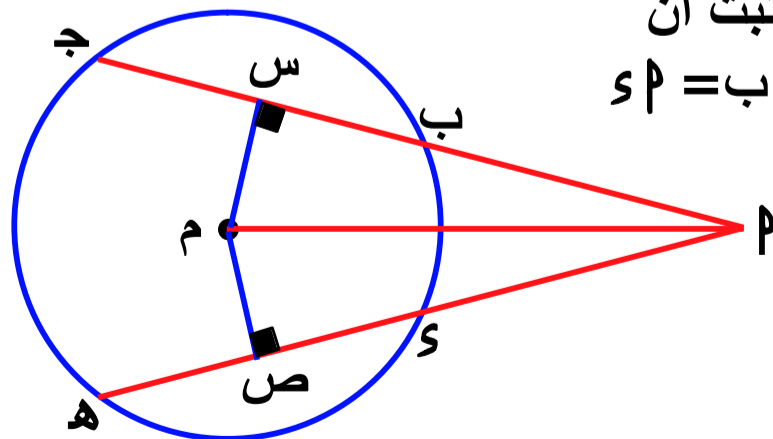
==================================

(٩) فى الشكل المقابل

إذا كان م س = م ص = م ع

أوجد ق(∠أ)

وإذا كان أ ب = ١٠ سم

أوجد محيط △ أ ب جـ

==================================

الزاوية المركزية و قياس الأقواس

القوس

هناك قوسان يعبر عنهما أب

(١) أب (الاصغر) أو أ ء ب

(٢) أب (الاكبر) أو أ هـ ب

ملاحظات :-

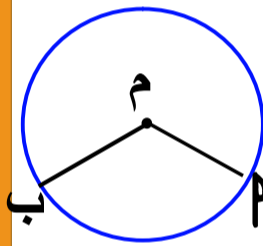
(١) أب يعبر عن القوس الأصغر إن لم يذكر غير ذلك

(٢) إذا كان و ل قطر فى الدائرة م فإن

و هـ ل = و ء ل ويسمى كلا منهما نصف دائرة

الزاوية المركزية

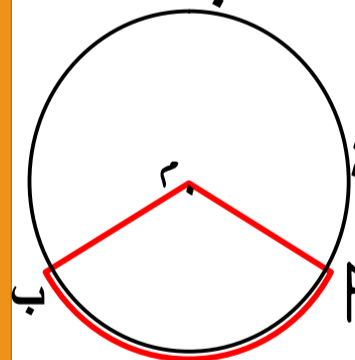
هى الزاوية التى رأسها مركز الدائرة و يحمل كل من ضليعها نصف قطر فى الدائرة

ملاحظات هامة

١) (∠ أ م ب) المركزية يقابلها أب (الاصغر)

٢) (∠ أ م ب) المركزية المنعكسة يقابلها أب (الاكبر)

قياس القوس

هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له

ق (أ ب) = ق(∠أ م ب)

ق(أب) الاكبر = ق(∠أ م ب) المنعكسة

ملاحظات هامة

١) قياس الدائرة = ٣٦٠°

٢) قياس القوس الذى يمثل نصف الدائرة = ١٨٠°

٣) قياس القوس الذى يمثل ربع الدائرة = ٩٠°

٤) قياس القوس الذى يمثل ثلث الدائرة = ١٢٠°

٥) قياس القوس الذى يمثل ثلاث أرباع الدائرة = ٢٧٠°

٦) قياس $\frac{٢}{٥}$ الدائرة = $\frac{٢}{٥}$ × ٣٦٠° = ١٤٤°

طول القوس

هو جزء من محيط دائرة يتناسب مع قياسه

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$$

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيط الدائرة

= $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

ملاحظات هامة

١) طول القوس الذى يمثل نصف الدائرة = π نق

٢) طول القوس الذى يمثل ربع الدائرة = $\frac{١}{٤}$ × ٢ π نق

= $\frac{١}{٢}$ π نق

٣) طول القوس الذى يمثل ثلث الدائرة = $\frac{١}{٣}$ × ٢ π نق

= $\frac{٢}{٣}$ π نق

=================================

مثـــال ١

أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٢٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٢١ سم

الحل

∵ طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيط الدائرة

∴ طول القوس = $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

= $\frac{١}{٣}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ = ٤٤ سم

=================================

مثـــال ٢ أوجد طول القوس الذى يمثل رُبع الدائرة التى طول نصف قطرها ١٤سم

الحل

طول القوس = $\frac{١}{٤}$ × ٢ π نق

= $\frac{١}{٤}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ = ٢٢سم

مثـال ٣ أوجد قياس وطـول القوس الـذى يمثل $\frac{٢}{٥}$ من الدائرة حيث طول قطر الدائرة ١٤ سـم $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$

الحل

قياس القوس = $\frac{٢}{٥}$ قيـاس الـدائـرة

$= \frac{٢}{٥} \times ٣٦٠^\circ = ١٤٤^\circ$

طـول القـوس $= \frac{١٤٤^\circ}{٣٦٠^\circ} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ = ١٧,٦$ سـم

مثـال ٤ أوجد قياس القوس الذى طوله ١١سم فى دائرة طول نصف قطرها ٧سم $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$

الحل

قياس القوس $= \frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} \times ٣٦٠^\circ$

قياس القوس $= \frac{١١}{٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧} \times ٣٦٠ = ٩٠^\circ$

مثـال ٥ فى الدائرة م ق(∠ ب) = ٤٥ ، م أ = ٧سم أوجد طول $\overset{\frown}{أب}$

الحل

∵ م أ = م ب = نق

∴ Δ أ م ب متساوى الساقين

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ٤٥°

∴ ق(∠ م) = ١٨٠ − (٤٥ + ٤٥) = ٩٠°

∴ ق($\overset{\frown}{أب}$) = ٩٠°

∴ طول $\overset{\frown}{أب}$ $= \frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠} \times ٢\pi$ نق

$= \frac{٩٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ = ١١$ سم

مثـال ٦ فى الشكل المقابل أ ب قطـر فى الدائرة ق(∠ د جـ أ) = ٣٠° ، ق($\overset{\frown}{أ د}$) = ٨٠ أوجـد: ق(∠ م د جـ)

الحل

∵ ق($\overset{\frown}{أ د}$) = ق(∠ أ م د) = ٨٠

∵ (∠ أ م د خـارجة عن Δ

∴ ق(∠ م د جـ) = ٨٠ − ٣٠ = ٥٠°

نتـائج هامة

نتيجة ١ : فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس متساوية فى الطول والعكس صحيح

إذا كان: ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق($\overset{\frown}{جـ د}$)

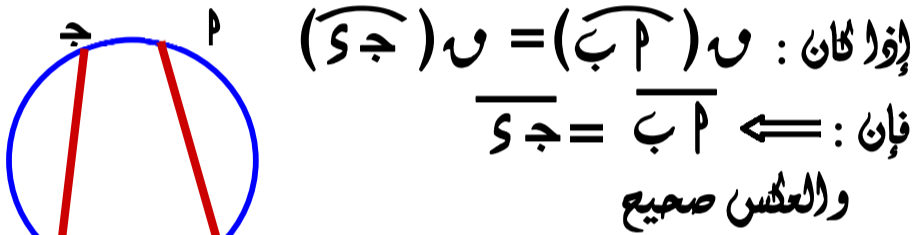
فإن طول $\overset{\frown}{أب}$ = طول $\overset{\frown}{جـ د}$

والعكس صحيح

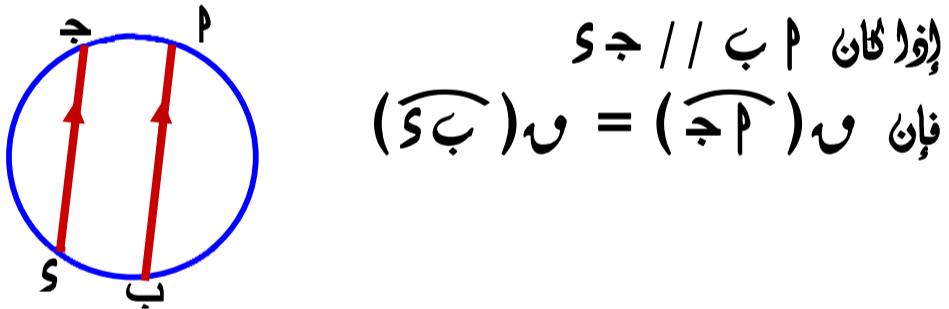
نتيجة ٢ : فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس أوتارها متساوية فى الطول والعكس صحيح

إذا كان: ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق($\overset{\frown}{جـ د}$)

فإن: ⟸ $\overline{أب} = \overline{جـ د}$

والعكس صحيح

نتيجة ٣ : الوتران المتوازيان فى دائرة يحصران قوسين متساويين فى القياس

إذا كان $\overline{أب}$ // $\overline{جـ د}$

فإن ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ق($\overset{\frown}{ب د}$)

نتيجة ٤ : القوسان المحصوران بين وتر و مماس يوازيه متساويان فى القياس

إذا كان $\overline{أب}$ // $\overline{جـ د}$

فإن ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ق($\overset{\frown}{جـ د}$)

(١) فى الشكل المقابل

أب // جـ ء

اثبت أن أ ء = ب جـ

البرهان

∵ أب // جـ ء

∴ ق(أجـ) = ق(ب ء)

بإضافة ق(جـ ء) للطرفين

∴ ق(أجـ ء) = ق(ب ء جـ)

∴ أ ء = ب جـ

==

(٢) فى الشكل المقابل

ب هـ مماس للدائرة

ب جـ // أ ء ، ب هـ // أ جـ

اثبت أن Δ ب جـ ء متساوى الساقين

البرهان

∵ ب هـ // أ جـ ⇐ ق(أب) = ق(ب جـ) (١)

∵ ب جـ // أ ء ⇐ ق(أب) = ق(جـ ء) (٢)

من ١ ، ٢ ∴ ق(ب جـ) = ق(جـ ء)

∴ ب جـ = جـ ء ∴ Δ ب جـ ء متساوى الساقين

==

(٣) فى الشكل المقابل

أب // جـ ء ، ق(أجـ) = ٨٠

طول أجـ = طول أب

أوجد: ق(أ̂) ، ق(جـ ء)

البرهان

∵ طول أجـ = طول أ ب

∴ ق(أجـ) = ق(أب) = ٨٠

∴ ق(∠أم ب) المركزية = ق(أب) = ٨٠

∵ أم = ب م = نق

∴ ق(أ̂) = ق(ب̂) = $\frac{١٨٠ - ٨٠}{٢}$ = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠°

∵ أب // جـ ء

∴ ق(أجـ) = ق(ب ء) = ٨٠

ق(جـ ء) = ٣٦٠ − (٨٠ + ٨٠ + ٨٠)

= ٣٦٠ − ٢٤٠ = ١٢٠

(٤) فى الشكل المقابل

أ س مماس للدائرة عند أ

، ب جـ // أ س ، ق(∠ب) = ٣٥°

أوجد ق(∠ب أ جـ)

البرهان

∵ أ س // ب جـ ⇐ ق(أب) = ق(أجـ)

∴ أ ب = أ جـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) = ٣٥°

∴ ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠° − [٣٥ + ٣٥]

= ١٨٠° − ٧٠ = ١١٠°

==

(٥) فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء مستطيل ،

جـ ء = جـ هـ

اثبت أن أ هـ = ب جـ

البرهان

∵ أ ب جـ ء مستطيل

∴ أب = جـ ء

∵ جـ ء = جـ هـ

∴ أب = جـ هـ

∴ ق(أب) = ق(جـ هـ)

بإضافة ق(ب هـ) للطرفين

∴ ق(أب هـ) = ق(جـ هـ ب)

∴ أ هـ = ب جـ

تمارين ٥

س١ أكمل ما يلى :

١ الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران قوسين ....

٢ الزاوية المركزية التى قياسها ٩٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة .

٣ طول القوس الذى يمثل $\frac{1}{4}$ محيط الدائرة = ...

، قياس القوس الذى يمثل $\frac{1}{3}$ محيط الدائرة = ...

٤ قياس القوس الذى يساوى ٠,٤ قياس الدائرة = ...°

٥ قياس القوس الذى طوله ٢ سم فى دائرة محيطها ٢٤ سم يساوى ....

٦ طول الدائرة = ... ، قياس الدائرة = ...

٧ الزاوية المركزية فى دائرة يقع رأسها عند .... وكل من ضلعيها يحمل ....

٨ فى الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس تكون ....

٩ قياس القوس = ... بينما طول القوس هو جزء من ....

١٠ قياس نصف الدائرة = ... بينما طول نصف الدائرة = ...

١١ إذا كان دائرة محيطها = ٣٦ سم فإن قياس قوس فيها طوله ٦ سم = ...

١٢ قياس القوس الذى يمثل $\frac{1}{5}$ قياس الدائرة = ..

١٣ قياس القوس الذى طوله ١٢ سم فى دائرة محيطها ٢٤ سم يساوى ....

١٤ الزاوية المركزية التى قياسها ٣٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة

١٥ إذا كان أ ب جـ ء مربع فإن ق (أب) = ...

=====================================

(٢) فى الشكل المقابل

أ س مماس للدائرة عند أ

، ب جـ // أ س ، ق (∠ب) = ٣٥°

أوجد

ق (∠ب أ جـ)

=====================================

(٣) فى الشكل المقابل أ ب قطر فى الدائرة م

ق (أ جـ) = ق (جـ ء) = ق (ء ب)

إثبت أن

△ أ جـ ء متساوى الاضلاع

(٤) فى الشكل المقابل

أب ، جـ ء قطران فى الدائرة م

، أب // جـ هـ

ق (∠ء م ب) = ٣٥°

أوجد ق (جـ هـ) ، ق (أ ء)

=====================================

(٥) فى الشكل المقابل

أب // جـ ء

، هـ منتصف أب

اثبت أن هـ ء = هـ جـ

=====================================

(٦) فى الشكل المقابل

أب قطر، ق (أ جـ) = ٧٠°

ق (∠هـ) = ٣٠°

أوجد ق (جـ ء)

=====================================

(٧) فى الشكل المقابل :

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ

إثبت أن

ق (ب هـ) = ق (جـ هـ)

=====================================

(٨) فى الشكل المقابل :

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان لدائرة مركزها م عند ب ، جـ ،

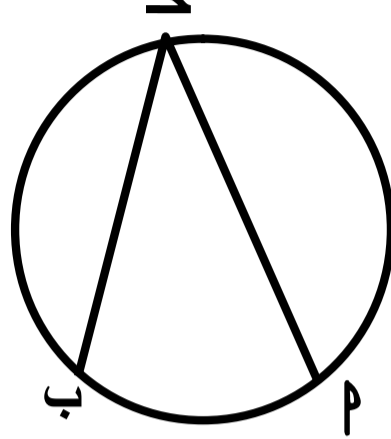
ق (∠ب أ جـ) = ٢٥°

أوجد

ق (ب جـ) الاكبر

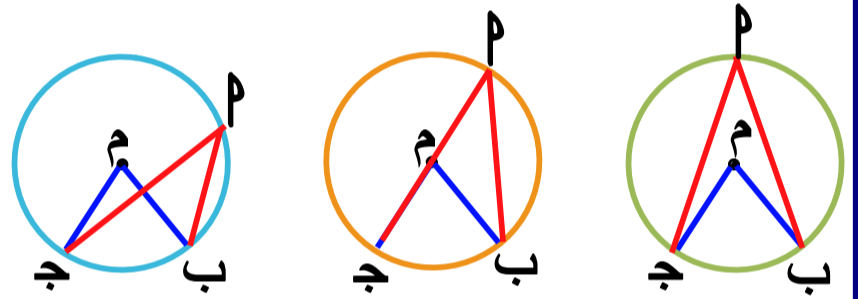
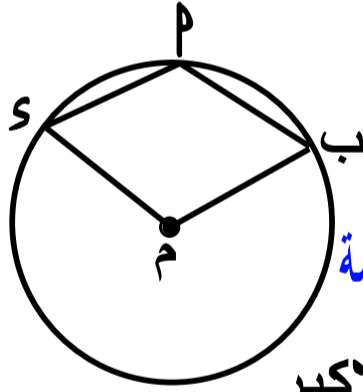
أ/ عبدالمقصود حنفى
ت/ ٠١٠٦٧٣٣٦٣١٥

الزاوية المحيطية :

هى الزاوية التى رأسها على الدائرة و يحمل كل ضلع من ضلعيها وتراً فى الدائرة

∠ ٱ حـ ب زاوية محيطية

ٱ ب هو القوس المقابل لها

نظرية ١

قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

ق (∠ ٱ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (∠ م) المركزية

مشتركتان فى ب حـ

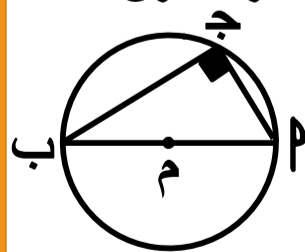
ق (∠ ب ٱ ء) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (∠ م) المركزية المنعكسة

مشتركتان فى ب ء الاكبر

===

نتائج هامة

١ قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها

٢ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة تكون قائمة

∵ ٱ ب قطر فى الدائرة

∴ ق (∠ حـ) = ٩٠°

عكس النتيجة

إذا كان ق (∠ حـ) المحيطية = ٩٠°

فإن ٱ ب قطر فى الدائرة

العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين فى القوس

(٣) الزاوية المحيطية تقابل قوساً أقل من نصف دائرة تكون حادة

(٤) الزاوية المحيطية تقابل قوساً أكبر من نصف دائرة تكون منفرجة

===

مثـال ١ : فى الأشكال الآتية أوجد س بالدرجات :

١ س = ٥٠°

٢ س = ٨٠°

٣ س = ٨٠°

٤ س = ٧٠°

٥ س = ١٣٠°

===

مثـال ٢ فى الأشكال الآتية أكمل :

١ ق (ٱ ب) = ١٤٠°

٢ ق (ٱ ب) = ٤٠°

===

(٣) فى الشكل المقابل

$ق(\angle ب م ء) = ١١٠°$

أوجد

$ق(\angle ب جـ ء)$ ، $ق(\angle ب أ ء)$

البرهان

$\because ق(\angle ب جـ ء)$ المحيطية $= \frac{١}{٢} ق(\angle ب م ء)$ المركزية

$= ٥٥°$

$\therefore ق(\angle ب م ء)$ المركزية المنعكسة

$= ٣٦٠° - ١١٠° = ٢٥٠°$

$ق(\angle أ)$ المحيطية $= \frac{١}{٢} ق(\angle ب م ء)$ المركزية المنعكسة

$= ١٢٥°$

==================================

(٤) فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ مماس للدائرة

$ق(\angle أ) = ٤٠°$

اوجد $ق(\angle ء)$

البرهان

$\because$ $\overline{أب}$ مماس ، $\overline{م ب}$ نصف قطر

$\therefore \overline{م ب} \perp \overline{أب}$

$\therefore ق(\angle أ ب م) = ٩٠°$

$\therefore ق(\angle أ م ب) = ١٨٠ - (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°$

$\therefore ق(\angle ء)$ المحيطية $= \frac{١}{٢} ق(\angle ب م جـ)$ المركزية

مشتركتان فى $\overset{\frown}{ب جـ}$

$\therefore ق(\angle ء) = ٢٥°$

(٥) فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة ، $\overline{م ء} \perp \overline{أ جـ}$ ، $ق(\angle أ) = ٣٠°$

اثبت أن $\overline{م ء} // \overline{ب جـ}$

، $ب جـ = نق$

البرهان

$\because$ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة

$\therefore ق(\angle جـ) = ٩٠°$ محيطية فى نصف دائرة

$\therefore ق(\angle جـ) = ق(\angle أ ء م) = ٩٠°$

وهما فى وضع تناظر

$\therefore \overline{م ء} // \overline{ب جـ}$

فى Δ أ ب جـ القائم فى جـ

$\because ق(\angle أ) = ٣٠°$

$\therefore ب جـ = \frac{١}{٢} أ ب = نق$

==================================

(٦) فى الشكل المقابل

$\overline{أب} // \overline{م جـ}$

، $\overline{أ م} \cap \overline{ب جـ} = \{هـ\}$

اثبت أن $ب هـ > أ هـ$

البرهان

$\because \overline{أب} // \overline{م جـ}$

$\therefore ق(\angle أ) = ق(\angle م)$ بالتبادل (١)

$\because ق(\angle ب)$ المحيطية $= \frac{١}{٢} ق(\angle م)$ المركزية (٢)

مشتركتان فى $\overset{\frown}{أ جـ}$

من ١ ، ٢ $\therefore ق(\angle ب) = \frac{١}{٢} ق(\angle أ)$

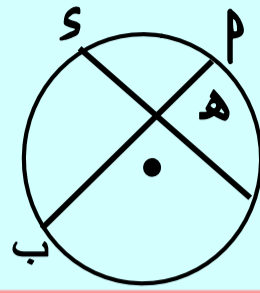
فى Δ أ ب هـ

$\because ق(\angle أ) > ق(\angle ب)$

$\therefore ب هـ > أ هـ$

تمرين مشهور ١

قياس زاوية تقاطع وترين داخل دائرة

ق (∠ أ هـ جـ) $= \frac{1}{2}$ [ق(⌒أجـ) + ق(⌒ب ء)]

تمرين مشهور ٢

قياس زاوية تقاطع وترين خارج دائرة

ق (∠ هـ) $= \frac{1}{2}$ [ق (⌒أجـ) – ق (⌒ب ء)]

مثـــال ١ : فى الأشكال الآتية أكمل :

(١) ق (∠ أ هـ ء) = ٨٥°

(٢) ق (⌒أ ء) = ١٠٠°

(٣) ق (∠ ب أ ء) = ٣٥°

(٤) ق (⌒هـ جـ) = ٤٠°

---

(٢) فى الشكل المقابل

ق (⌒أجـ) = ٤٠° ، ق (⌒ب ء) = ٩٠°

أوجد ق (∠ أ هـ جـ)

الحل

ق(∠أ هـ جـ) $= \frac{1}{2}$ [ق(⌒أجـ) + ق(⌒ب ء)]

ق(∠ أ هـ جـ) $= \frac{1}{2} \times$ [٤٠° + ٩٠°] = ٦٥°

(٣) فى الشكل المقابل

ق(⌒ب ء) = ٣٠°

ق(∠م) = ٨٠°

أوجد ق(∠أ هـ جـ)

الحل

ق (⌒أجـ) = ق (∠ أ م جـ) المركزية = ٨٠°

ق(∠هـ) $= \frac{1}{2}$ [ق (⌒أجـ) – ق (⌒ب ء)]

ق(∠هـ) $= \frac{1}{2} \times$ [٨٠° – ٣٠°] = ٢٥°

---

(٤) فى الشكل المقابل

ق(⌒ب ء) = ٢٠° ، ق(∠هـ) = ٥٠°

أوجد ق (⌒أجـ)

الحل

ق(∠هـ) $= \frac{1}{2}$ [ق (⌒أجـ) – ق(⌒ب ء)]

٥٠ $= \frac{1}{2}$ [ق (⌒أجـ) – ٢٠] ×٢

١٠٠ = ق (⌒أجـ) – ٢٠

١٠٠ + ٢٠ = ق (⌒أجـ)

ق (⌒أجـ) = ١٢٠°

---

(٥) فى الشكل المقابل

ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠ب جـ ء) = ٢٦

أوجد ق(⌒هـ جـ)

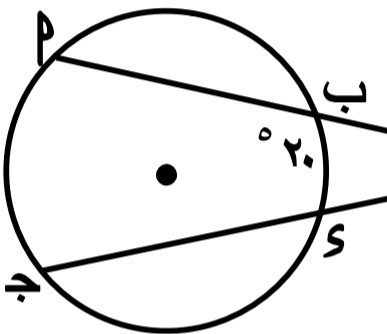
الحل

∵ ق(∠جـ) المحيطية $= \frac{1}{2}$ ق(⌒ب ء)

∴ ق(⌒ب ء) = ٢٦ × ٢ = ٥٢°

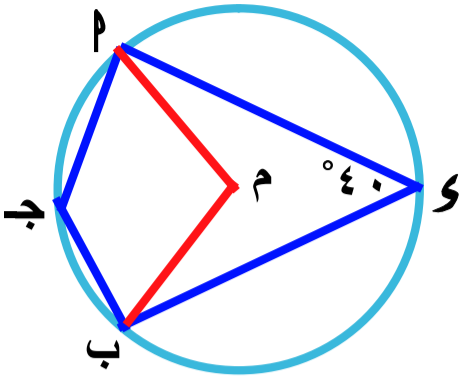
(∠ أ) $= \frac{1}{2}$ [ق(⌒هـ جـ) - ق(⌒ب ء)]

٤٠° $= \frac{1}{2}$ [ق(⌒هـ جـ) - ٥٢°]

ق (⌒هـ جـ) = ١٣٢°

تمارين ٦

س١ أكمل ما يلى :

١) الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة ....
٢) قياس الزاوية المحيطية يساوي .... قياس القوس المقابل لها
٣) الزاوية المحيطية التي تقابل قوس أصغر في الدائرة .....
٤) قياس الزاوية المركزية ....قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس
٥) قياس الزاوية المحيطية يساوى...... قياس القوس المقابل لها
٦) النسبة بين قياس الزاوية المركزية إلى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس = ...

س٢ في كل شكل من الاشكال الاتية أكمل

(١) ق (∠ هـ) = ... °

(٢) ق (ب͡ هـ) = ... °

(٣) ق (س͡ص) – ق (ب͡هـ) = ...

(٤) ق (هـ͡أ) = ...

(٥) ق (هـ͡ هـ) = ...

(٦) ق (∠ أ هـ هـ) = ...

(٧) ق (أ͡ هـ) + ق (ب͡ ى) = ...

(٨) ق (∠ أ) = ... °

(٩) ق (∠ هـ) + ق (∠ أ م ب) = ٩٠°
فإن ق (∠ هـ) = ...

(٣) فى الشكل المقابل
ق (∠ أ ى ب) = ٤٠
أوجد
ق (∠ أ جـ ب)

=======================================

(٤) فى الشكل المقابل
ق (∠ ى م ب) = ١١٠°
أوجد
ق (∠ أ جـ ب)

=======================================

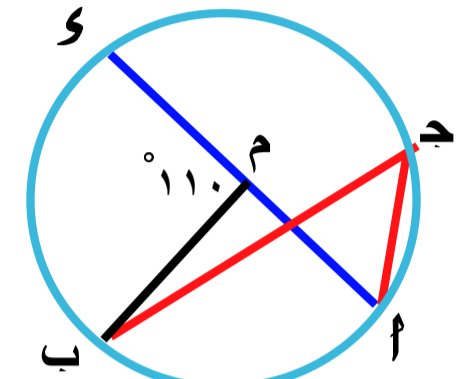
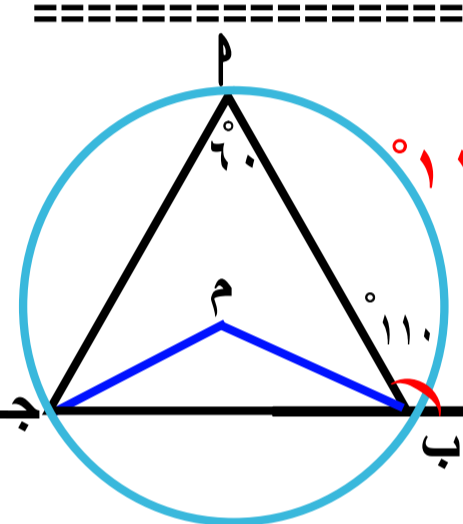
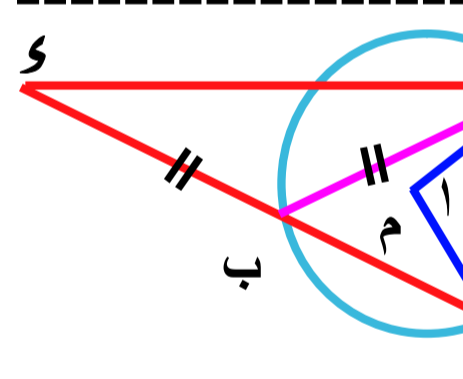
(٥) فى الشكل المقابل
ق (∠ أ ب ى) = ١١٠°
ق (∠ ب أ جـ) = ٦٠°
أوجد
ق (∠ أ ب م)

=======================================

(٦) فى الشكل المقابل
ق (∠ أ م جـ) = ١١٢°
، أ ب = ب ى
أوجد ق (∠ ى)

=======================================

(٧) فى الشكل المقابل
ق (∠ ب أ جـ) = ١٠٠°
أ ب // جـ ى
أوجد
ق (∠ أ م ى)

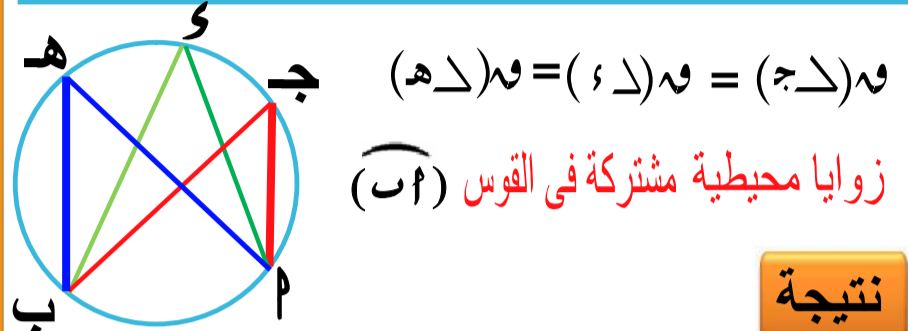
=======================================

(٨) فى الشكل المقابل
أ ب قطر فى الدائرة م ، طول أ ى = طول جـ ى
ق (∠ جـ أ ب) = ٣٥°
أوجد ق (∠ جـ ب ى)

الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

نظرية ٢

الزوايا المحيطية التى تحصرنفس القوس فى الدائرة الواحدة متساوية فى القياس

ق(∠جـ) = ق(∠ء) = ق(∠هـ)

زوايا محيطية مشتركة فى القوس (أب)

نتيجة

الزوايا المحيطية التى تحصر أقواساً متساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة أو فى عدة دوائر تكون متساوية فى القياس والعكس صحيح

إذا كان ق(أجـ) = ق(هـو) = ق(س ع)

فإن ق(∠ب) = ق(∠ء) = ق(∠ص)

---

(١) فى الشكل المقابل

أهـ = ءهـ

اثبت ان

هـب = هـجـ

البرهان

∵ أهـ = ءهـ

∴ ق(∠أ) = ق(∠ء) (١)

∵ ق(∠أ) المحيطية = ق(∠جـ) المحيطية (٢)

مشتركان فى (بء)

∵ ق(∠ء) المحيطية = ق(∠ب) المحيطية (٣)

مشتركان فى (أجـ)

من ١ ، ٢ ، ٣

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ب)

∴ هـب = هـجـ

---

(٢) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتين

متقاطعتين فى أ ، ب

اثبت أن

ق(∠هـبجـ) = ق(∠ءبو)

البرهان

فى الدائرة م

∵ ق(∠جـأهـ) المحيطية = ق(∠جـبهـ) المحيطية (١)

مشتركان فى (جـهـ)

فى الدائرة ن

∵ ق(∠وأء) المحيطية = ق(∠وبء) المحيطية (٢)

مشتركان فى (وء)

∵ ق(∠جـأهـ) = ق(∠وأء) بالتقابل بالرأس (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣

∴ ق(∠هـبجـ) = ق(∠ءبو)

---

(٣) فى الشكل المقابل

أب ، جـء وتران متساويان

اثبت أن

Δ أهـجـ متساوى الساقين

البرهان

∵ أب = جـء

∴ ق(أءب) = ق(جـبء)

بطرح ق(بء) من الطرفين

∴ ق(أء) = ق(بجـ)

∴ ق(∠جـ) = ق(∠أ)

∴ هـأ = هـجـ

∴ Δ أهـجـ متساوى الساقين

(٤) فى الشكل المقابل

إذا كان ق (∠ ب أ ء) = ١٢٠°

أوجد ق (∠ ء ب جـ)

البرهان

∵ ب جـ قطر

⇐ ق (∠ ب أ جـ) = ٩٠° محيطية فى نصف دائرة

∵ ق (∠ ب أ ء) = ١٢٠°

∴ ق (∠ جـ أ ء) = ١٢٠ − ٩٠ = ٣٠°

∴ ق (∠ ء ب جـ) = ق (∠ جـ أ ء) = ٣٠°

مُحيطيتان مشتركتان فى القوس جـ ء

=====================================

(٥) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، ق (∠ أ ب جـ) = ٧٠°

، ق (∠ ء) = ٥ ع − ١٠°

أوجد قيمة ع

البرهان

∵ أ ب = أ جـ

ق (∠ أ جـ ب) = ق (∠ أ ب جـ) = ٧٠°

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠ − (٧٠ + ٧٠) = ٤٠°

∴ ق (∠ ء) = ق (∠ أ) = ٤٠°

٥ ع − ١٠° = ٤٠°

٥ ع = ٤٠ + ١٠ ⇐ ٥ ع = ٥٠ ÷ ٥

∴ ع = ١٠

=====================================

(٦) فى الشكل المقابل

أ ب قطر في الدائرة م

، ق (∠ أ ب جـ) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ ب ء جـ)

البرهان

∵ أ ب قطر ⇐

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ٩٠° محيطية فى نصف دائرة

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠ − (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠

∵ ق (∠ أ) = ق (∠ ب ء جـ)

مُحيطيتان مشتركتان فى القوس ب جـ

∴ ق (∠ ب ء جـ) = ٥٠°

تمارين ٧

(١) فى الشكل المقابل

ب جـ ، أ ء وتران متقاطعان في هـ ،

ق (∠ جـ هـ ء) = ١٢٠° ، ق (∠ ب) = ٧٥°

أوجد : ق (∠ جـ) مع البرهان

=====================================

(٢) فى الشكل المقابل

أ ب قطر في الدائرة م

، ق (∠ أ جـ ء) = ١٣٠°

أوجد ق (∠ ء س ب)

=====================================

(٣) فى الشكل المقابل

△ أ ب جـ متساوي الأضلاع

مرسوم داخل دائرة م

① **أوجد** ق (∠ جـ ء ب)

② **أثبت أن** أ ب ⊥ ء جـ

=====================================

(٤) فى الشكل المقابل

أ ء = ب هـ

اثبت ان

جـ ء = جـ هـ

=====================================

(٥) فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، ء هـ // ب جـ

أثبت أن

ق (∠ ء أ جـ) = ق (∠ ب أ هـ)

=====================================

(٦) فى الشكل المقابل

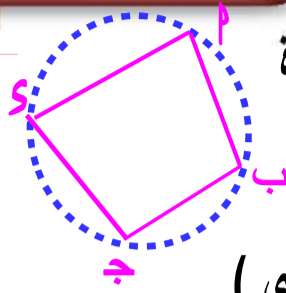
أ ب ، جـ ء وتران متوازيان فى الدائرة

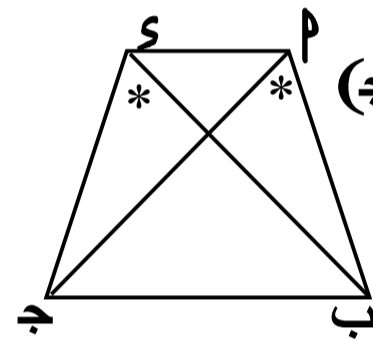
أثبت أن:

أ و = و ب

الشكل الرباعى الدائرى

هو شكل رباعى
تنتمى رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة
أو يمكن رسم دائرة تمر برؤوسه الاربعة

الشكل الرباعى أ ب جـ ى (رباعى دائرى)

عكس نظرية (٢)

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها فإنه يمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وتراً فيها

فى الشكل المقابل
إذا كان ق(∠ب ٮ جـ) = ق(∠ب ى جـ)
المرسومتان على القاعدة $\overline{ب جـ}$
∴ ٮ ب جـ ى رباعى دائرى

ملاحظة
إذا كان ق(∠ب ٮ جـ) = ٩٠° كان $\overline{ب جـ}$ قطر فى الدائرة

ملاحظات

١) المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوى الساقين أشكال رباعية دائرية

٢) متوازى الاضلاع والمعين وشبه المنحرف الغير متساوى الساقين أشكال رباعية غير دائرية

(١) فى الشكل المقابل
ٮ ب = ٮ ى ، ق(∠ٮ) = ٨٠° ، ق(∠جـ) = ٥٠° **أثبت أن** ٮ ، ب ، جـ ، ى تمر بها دائرة واحدة

البرهان

∵ ٮ ب = ٮ ى

$$∴ ق(∠ٮ ى ب) = ق(∠ٮ ب ى) = \frac{١٨٠ - ٨٠}{٢} = ٥٠°$$

∴ ق(∠ى) = ق(∠جـ) = ٥٠°
و هما مرسومتان على $\overline{ٮ ب}$
∴ ٮ ، ب ، جـ ، ى تمر بها دائرة واحدة
∴ ٮ ب جـ ى رباعى دائرى

(٢) فى الشكل المقابل
أثبت أن الشكل ٮ ب جـ ى رباعى دائرى

البرهان

∵ ∠ب هـ جـ خارجة عن △ ى هـ جـ
∴ ق(∠هـ ى جـ) = ٨٥ − ٥٠ = ٣٥°
∴ ق(∠ب ٮ جـ) = ق(∠ب ى جـ) = ٣٥°
و هما مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{ب جـ}$ و فى جهة واحدة منها
∴ الشكل ٮ ب جـ ى رباعى دائرى

(٣) فى الشكل المقابل
$\overline{ٮ ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{ى هـ}$ ⊥ $\overline{ٮ ب}$
إثبت أن ٮ جـ ى هـ رباعى دائرى

∵ $\overline{ٮ ب}$ قطر فى الدائرة م ⟸ ق(∠ٮ جـ هـ) = ٩٠° محيطية فى نصف دائرة
∵ $\overline{ى هـ}$ ⊥ $\overline{ٮ ب}$ ⟸ ق(∠ٮ ى هـ) = ٩٠°
∴ ق(∠ٮ جـ هـ) = ق(∠ٮ ى هـ) = ٩٠°
و هما مرسومتان على $\overline{ٮ هـ}$
الشكل ٮ جـ ى هـ رباعى دائرى

(٤) فى الشكل المقابل
$\overline{س ص}$ // $\overline{ٮ ى}$
اثبت أن س ب جـ ص رباعى دائرى

∴ ٮ ب جـ ى رباعى دائرى
∴ ق(∠ٮ ى ب) = ق(∠ٮ جـ ب) ١ مرسومتان على $\overline{ٮ ب}$
∵ $\overline{س ص}$ // $\overline{ٮ ى}$
∴ ق(∠ٮ ى ب) = ق(∠س ص ب) بالتناظر ٢
من ١ ، ٢
∴ ق(∠س ص ب) = ق(∠س جـ ب)
و هما مرسومتان على $\overline{س ب}$ و فى جهة واحدة منها
∴ س ب جـ ص رباعى دائرى

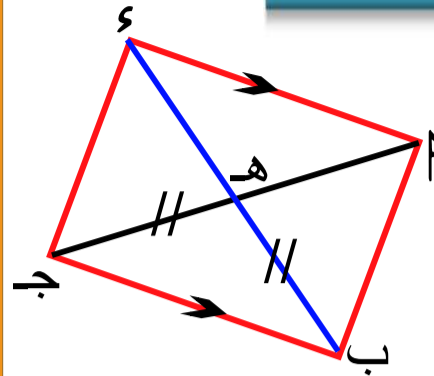
تمارين ٨

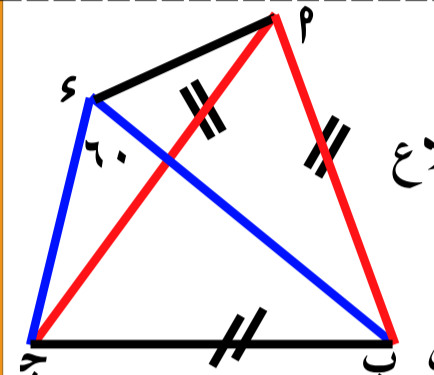
(١) فى الشكل المقابل

$\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$

، هـ ب = هـ جـ

إثبت أن

أ ب جـ ء رباعي دائرى

(٢) فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع

، ق(∠ب ء جـ) = ٦٠°

إثبت أن

الشكل أ ب جـ ء رباعي دائرى

(٣) فى الشكل المقابل

أ هـ ينصف ∠ ب أ جـ ،

ء و ينصف ∠ ب ء جـ

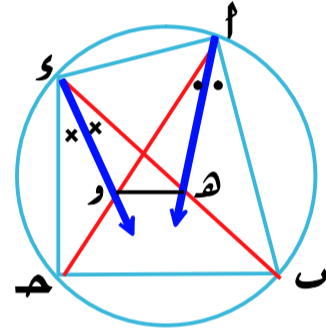
اثبت أن :

الشكل أ هـ و ء رباعي دائري

(٤) فى الشكل المقابل

ق(∠ب أ جـ) = ٤٢°

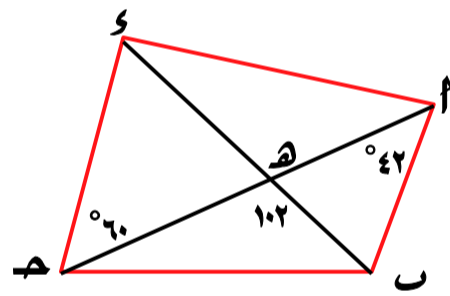
، ق(∠أ جـ ء) = ٦٠°

، ق(∠ب هـ جـ) = ١٠٢°

اثبت أن :

أ ب جـ ء رباعي دائري

(٥) فى الشكل المقابل

أ جـ قطر في الدائرة م

، س ص منتصف أب

، جـ ص مماس للدائرة

اثبت أن

(١) الشكل أ س جـ ص رباعي دائري

(٢) ق(∠ب م جـ) = ٢ق(∠ م ص جـ)

(٦) فى الشكل المقابل

ق(أ س) = ق(أ ص)

أثبت أن

(١) الشكل ب جـ هـ ء رباعي دائري

(٢) ق(∠ء هـ ب) = ق(∠س أ ب)

خواص الشكل الرباعى الدائرى

١ كل زاويتين متقابلتين متكاملتان (مجموعهما = ١٨٠°)

إذا كان الشكل أ ب جـ ء رباعي دائرى فإن:

① ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

② ق(∠ب) + ق(∠ء) = ١٨٠°

٢ قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعى الدائرى يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة

إذا كان الشكل أ ب جـ ء رباعي دائرى

∴ ق(∠ب أ هـ) = ق(∠ب جـ ء)

٣ كل زاويتين مرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع متساويتان فى القياس

إذا كان الشكل أ ب جـ ء رباعي دائرى فإن:

ق(∠١) = ق(∠٢)

ق(∠٣) = ق(∠٤)

يكون الشكل الرباعي دائريا إذا تحققت إحدى الشروط الأتية

١ إذا وجدت نقطة فى مستوى الشكل تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه

٢ إذا وجدت زاويتان متساويتان فى القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع

٣ إذا وجدت زاويتان متقابلتان فيه متكاملتان (مجموع قياسهم = ١٨٠°)

٤ إذا وجدت زاوية خارجة عند أى رأس من رؤوسه قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

مثـــال اي من الأشكال الآتية رباعي دائرى

(١) فى الشكل المقابل

أب قطر فى الدائرة ، ق(∠ جـ أ ب) = ٤٠°
أوجد ق(∠ د)

البرهان

∵ أب قطر فى الدائرة ⟸ ق(∠ أ جـ ب) = ٩٠° محيطية فى نصف دائرة
فى Δ أ ب جـ
ق(∠ ب) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°
∵ أ ب جـ د رباعى دائرى
∴ ق(∠ ب) + ق(∠ د) = ١٨٠°
∴ ق(∠ د) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠°

(٢) فى الشكل المقابل

أ ب جـ د شكل رباعى مرسوم داخل دائرة
ق(∠ أ د هـ) = ١١٠° ، ق(∠ ب جـ أ) = ٣٥°
اثبت أن Δ أ ب جـ متساوى الساقين

البرهان

∵ أ ب جـ د رباعى دائرى
∴ ق(∠ أ د هـ) = ق(∠ ب) = ١١٠°
(الخارجة = المقابلة للمجاورة)
فى Δ أ ب جـ
∴ ق(∠ ب أ جـ) = ١٨٠ − (١١٠ + ٣٥) = ٣٥°
∵ ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ ب جـ أ)
∴ Δ أ ب جـ متساوى الساقين

(٣) فى الشكل المقابل

ق(∠ د جـ هـ) = ص − ٢٤°
أوجد : ص

البرهان

∵ أ ب جـ د رباعى دائرى
ق(∠ د جـ هـ) = ق(∠ أ)
(الخارجة = المقابلة للمجاورة)
∵ ص − ٢٤° = ٩٦°
ص = ٩٦° + ٢٤°
ص = ١٢٠°

(٤) فى الشكل المقابل

ق(أب⌒) = ١١٠° ، ق(∠ جـ ب هـ) = ٨٥°
أوجد ق(∠ ب د جـ)

البرهان

∵ ق(∠ أ د ب) المحيطية = ١/٢ ق(أب⌒) = ٥٥°
∵ أ ب جـ د رباعى دائرى
∴ ق(∠ جـ ب هـ) = ق(∠ أ د جـ) = ٨٥°
(الخارجة = المقابلة للمجاورة)
∴ ق(∠ ب د جـ) = ٨٥ − ٥٥ = ٣٠°

(٥) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتين متقاطعتين فى أ ، ب
، ق(∠ جـ) = ٧٠°
أوجد ق(∠ و)
ثم اثبت أن هـ و // جـ د

البرهان

∵ أ ب جـ د رباعى دائرى
∴ ق(∠ ب أ د) + ق(∠ جـ) = ١٨٠°
∴ ق(∠ ب أ د) = ١٨٠ − ٧٠ = ١١٠°
∵ أ ب و هـ رباعى دائرى
∴ ق(∠ ب أ د) = ق(∠ و) = ١١٠°
(الخارجة = المقابلة للمجاورة)
∴ ق(∠ جـ) + ق(∠ و)
= ٧٠° + ١١٠° = ١٨٠°
وهما داخلتان فى جهة واحدة من القاطع
∴ هـ و // جـ د

(٦) فى الشكل المقابل

أ ب حـ ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ ب حـ بحيث أ ب = أ هـ

أثبت أن : الشكل أ هـ حـ ء رباعي دائري

البرهان

∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع

∴ ق(∠ب) = ق(∠ء) (١)

∵ أ ب = أ هـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠أ هـ ب) (٢)

من ١ ، ٢ ق(∠أ هـ ب) = ق(∠ء)

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

∴ أ هـ حـ ء رباعى دائرى

==========

(٧) فى الشكل المقابل

أ ء // ب حـ

ق(∠ب) = ٧٤°

ق(∠وحـهـ) = ٥٣°

، حـو ينصف (∠ءحـهـ)

اثبت أن أ ب حـ ء رباعى دائرى

البرهان

∵ حـو ينصف (∠ءحـهـ)

∴ ق(∠ءحـهـ) = ٥٣ × ٢ = ١٠٦° من ① ، ②

∵ أ ء // ب حـ

∴ ق(∠ء) = ق(∠ءحـهـ) = ١٠٦° بالتبادل

∴ ق(∠ب) + ق(∠ء)

= ٧٤° + ١٠٦° = ١٨٠° متقابلتان متكاملتان

∴ أ ب حـ ء رباعى دائرى

==========

(٨) فى الشكل المقابل

أ ب مماس للدائرة م ، حـ منتصف ء هـ

إثبت أن أ ب م حـ رباعى دائرى

البرهان

∵ أ ب مماس للدائرة م ⇐ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

∵ حـ منتصف ء هـ ⇐ ق(∠أ حـ م) = ٩٠°

ق(∠أ ب م) + ق(∠أ حـ م) = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب حـ م رباعى دائرى

(٩) فى الشكل المقابل

أ ب حـ ء رباعي مرسوم داخل دائرة م

س منتصف ب حـ ، ص منتصف حـ ء

إثبت أن :

① الشكل م س حـ ص رباعي دائرى

② ق(∠س م ص) = ق(∠ب أ ء)

البرهان

∵ س منتصف ب حـ ⇐ م س ⊥ ب حـ

ق(∠م س حـ) = ٩٠°

∵ ص منتصف ء حـ ⇐ م ص ⊥ ء حـ

ق(∠م ص حـ) = ٩٠°

∴ ق(∠م س حـ) + ق(∠م ص حـ) = ١٨٠°

∴ الشكل م س حـ ص رباعى دائرى

∴ (∠س م ص) + ق(∠حـ) = ١٨٠° ⟵ ①

∵ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى

ق(∠ب أ ء) + ق(∠حـ) = ١٨٠° ⟵ ②

من ١ ، ٢ ق(∠س م ص) = ق(∠ب أ ء)

==========

(١٠) فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، ء منتصف أ حـ

، ب و مماس للدائرة عند ب

اثبت أن

① الشكل م ء و ب رباعى دائرى

② ق(∠و) = ٢ق(∠ب أ هـ)

البرهان

∵ ء منتصف أ حـ ⟸ ق(∠م ء و) = ٩٠°

∵ أ ب قطر فى الدائرة ، ب و مماس للدائرة

∴ ق(∠م ب و) = ٩٠°

∴ ق(∠م ب و) + ق(∠م ء و) = ١٨٠°

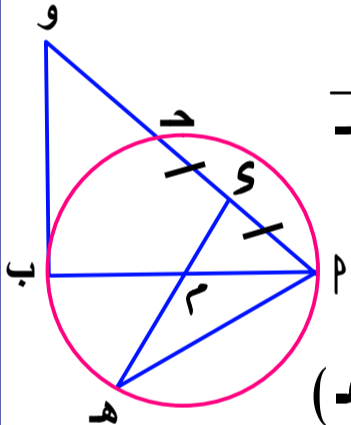
متقابلتان متكاملتان

∴ الشكل م ء و ب رباعى دائرى

∴ ق(∠ب م هـ) = ق(∠و)

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

∴ ق(∠ب م هـ) المركزية = ٢ق(∠ب أ هـ) المحيطية

∴ ق(∠و) = ٢ق(∠ب أ هـ)

تمارين ٩

أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١) فى الشكل الرباعى الدائرى كل زاويتين متقابلتين . . . . .
[متكاملتان ؛ متتامتان ؛ متساويتان فى القياس ؛ متبادلتان]

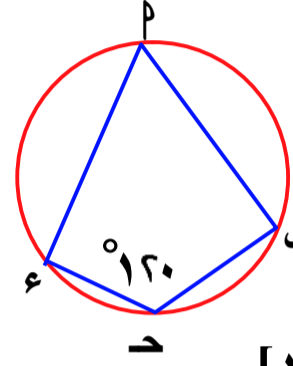
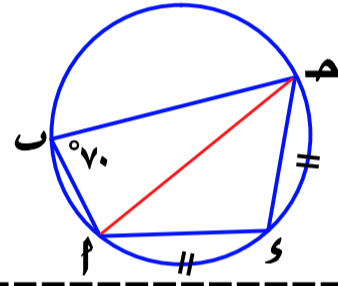
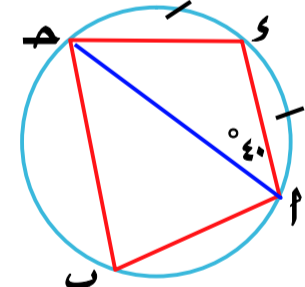
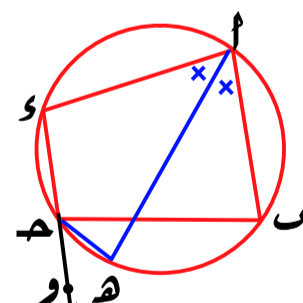
٢) فى الشكل الرباعى الدائرى كل زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها
[متكاملتان ؛ متتامتان ؛ متساويتان فى القياس ؛ متبادلتان]

٣) . . . . شكل رباعى دائرى [شبه المنحرف ؛ المعين ؛ متوازى الأضلاع ؛ المستطيل]

٤) فى الشكل المقابل :
ق (∠ أ) = ... °
[٢٤٠ ؛ ٦٠ ؛ ١٢٠ ؛ ١٨٠]
، ق (أ ⌒جـ) = ... °
[٢٤٠ ؛ ٦٠ ؛ ١٢٠ ؛ ١٨٠]

==========

(٢) فى الشكل المقابل
ق (∠ أ ب جـ) = ٧٠° ،
طول (أ ⌒ء) = طول (ء ⌒جـ)
أوجد : ق (∠ أ جـ ء)

==========

(٣) فى الشكل المقابل
س ص ع ل رباعي دائري
س ص = ص ع
، ق (∠ س ل هـ) = ١٢٠°
أوجد : ق (∠ س ص ع)

==========

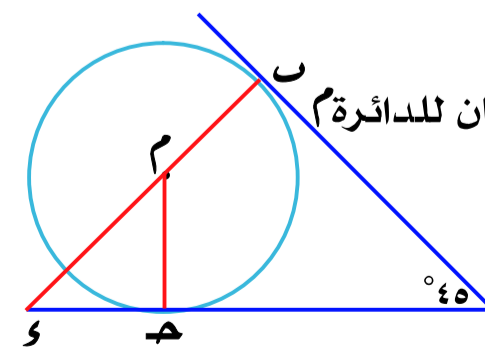
(٤) فى الشكل المقابل
ق (أ ⌒ء) = ق (ء ⌒جـ)
، ق (∠ ء أ جـ) = ٤٠°
أوجد ق (∠ ء)
، ق (∠ أ ب جـ)

==========

(٥) فى الشكل المقابل
الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري
، و ∈ ء جـ ، أ هـ ينصف ∠ ب أ ء
أثبت أن :
جـ هـ ينصف ∠ ب جـ و

==========

(٦) فى الشكل المقابل
أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م
ق (∠ أ) = ٤٥°
أثبت أن :
① أ ب م جـ رباعي دائري
② Δ م جـ ء متساوى الساقين

==========

(٧) فى الشكل المقابل
أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، الدائرة المارة
بالنقط ب ، جـ ، ء تقطع أ ب في هـ
أثبت أن : أ ء = هـ ء

==========

(٨) فى الشكل المقابل
ب جـ قطر في الدائرة م ،
هـ ء ⊥ ب جـ
أثبت أن :
ق (∠ جـ هـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق (أ ⌒جـ)

==========

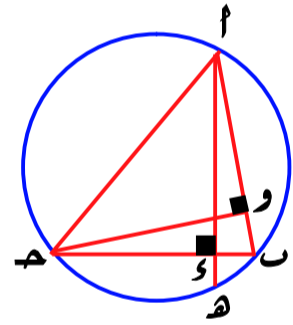
(٩) فى الشكل المقابل
أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة فيه
أب > أجـ ، أجـ = أ ء ،
أهـ ينصف (∠ أ)
اثبت أن
ب ء هـ و رباعي دائرى

==========

(١٠) فى الشكل المقابل
أ ء ⊥ ب جـ يقطعها في ء
ويقطع الدائرة في هـ ، جـ و ⊥ أ ب
أثبت أن :
① الشكل أ و ء جـ رباعي دائرى
② ق (∠ هـ ب جـ) = ق (∠ ء و جـ)

==========

(١١) فى الشكل المقابل
أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ،
و هـ // ب جـ
ء و ∩ جـ ب = { س }
أثبت أن :
① الشكل أ و هـ ء رباعي دائري
② ق (∠ ب س و) = ق (∠ هـ أ ء)

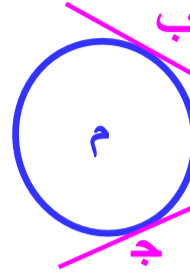
==========

(١٢) أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة
تقاطع قطراه أ جـ ، ب ء في و ،
س ∈ أ و ، ص ∈ ء و بحيث س ص // أ ء
اثبت أن
الشكل س ب جـ ص رباعي دائري

العلاقة بين مماسات الدائرة

نظرية ٤

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول

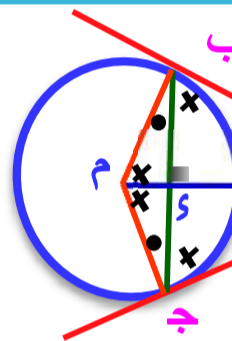
∵ أ ب ، أ حـ مماسان للدائرة

∴ أ ب = أ حـ

نتائج هامة

المستقيم المار بمركز الدائرة و نقطة تقاطع مماسين

① **ينصف** الزاوية بين هذين المماسين

② **ينصف** الزاوية بين نصفى القطرين المارين بنقطتى التماس

③ **ينصف** وتر التماس لهذين المماسين و يكون **عمودياً عليه** (اى يكون محور تماثل لوتر التماس)

① أ م ينصف الزاوية بين المماسين للدائرة

ق(ب أ م) = ق(جـ أ م)

② أ م ينصف الزاوية بين نصفى القطرين

ق(أ م ب) = ق(أ م جـ)

③ أ م ينصف وتر التماس ب جـ ويكون عموديا علية

ب ء = جـ ء ، أ م ⊥ ب جـ

④ الشكل أ ب م جـ يكون رباعي دائرى

مثـــال أوجد قيمة س بالدرجات فى كل شكل من الأشكال الآتية:

حيث أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة م

①

الحل

$س = \frac{١٨٠ - ٨٠}{٢} = ٥٠$

②

الحل

س = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠°

③

الحل

Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع

ق(∠أ) = ٦٠

س = ١٢٠°

④

الحل

ق(أ م ب) = ق(أ م جـ) = ٦٥

ق(م ب أ) = ٩٠

س = ٢٥°

---

(١) فى الشكل المقابل

س أ ، س ب مماسان للدائرة ،

ق(∠س) = ٧٠°

، ق(∠جـ) = ١٢٥°

اثبت أن

أ ب ينصف (∠ ء أ س)

، أ ء // س ب

البرهان

∵ س أ ، س ب مماستان للدائرة

∴ س أ = س ب

$∴ ق(∠س ب أ) = ق(∠س أ ب) = \frac{١٨٠-٧٠}{٢} = ٥٥°$

∵ أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ء أ ب) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠ء أ ب) = ١٨٠ - ١٢٥ = ٥٥°

∴ ق(∠س أ ب) = (∠ء أ ب) = ٥٥°

∴ أ ب ينصف (∠ء أ س)

∵ ق(∠أ ب س) = (∠ء أ ب) = ٥٥°

و هما فى وضع تبادل

∴ أ ء // س ب

---

(٢) فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ مماستان للدائرة

، أ ب // جـ ء

ق(∠ب م ء) = ١٣٠°

① اثبت أن جـ ب ينصف (∠أ جـ ء)

② أوجد ق(∠أ)

البرهان

$∵ ق(∠ب حـ ء)_{المحيطية} = \frac{١}{٢} ق(∠ب م ء)_{المركزية}$

ق(∠ب حـ ء) = ٦٥°

∵ أ ب // ء حـ

∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠ب حـ ء) = ٦٥° بالتبادل

∵ أ ب ، أ حـ مماستان للدائرة

∴ أ ب = أ حـ ⟸ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠أ حـ ب) = ٦٥

∵ ق(∠أ حـ ب) = ق(∠ب حـ ء) ⟸ حـ ب ينصف (∠أ حـ ء)

فى Δ أ ب حـ

ق(∠أ) = ١٨٠ − (٦٥ + ٦٥) = ٥٠°

ملاحظات

عدد المماسات المشتركة لدائرتين :

متباعدتين = ٤

متماستين من الخارج = ٣

متماستين من الداخل = ١

متقاطعتين = ٢

متداخلتين = صفر

تعريف الدائرة الداخلة لمضلع هى الدائرة التى تمس أضلاعه من الداخل

مركز الدائرة الداخلة للمثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

(٣) فى الشكل المقابل

أب ، أ جـ ، ب جـ مماسات للدائرة م ،

أ س = ٤ سم ، ب هـ = ٢ سم

، هـ جـ = ١ سم

أوجد محيط △ أ ب جـ

البرهان

∵ أ ء ، أ س مماسان للدائرة ⟸ أ ء = أ س = ٤ سم

∵ ب ء ، ب هـ مماسان للدائرة ⟸ ب ء = ب هـ = ٢ سم

∵ جـ هـ ، جـ س مماسان للدائرة ⟸ جـ هـ = جـ س = ١ سم

∴ محيط △ أ ب جـ = ٤+٤+٢+٢+١+١ = ١٤ سم

(٤) فى الشكل المقابل

دائرة م مرسومة داخل △ أ ب جـ

ق(∠ أ) = ٧٠°

، ق(∠ ب) = ٥٠°

أوجد ق(∠ ص س ع)

البرهان

∵ ب س ، ب ص مماسان للدائرة ⟸ ب س = ب ص

∴ ق(∠ ب س ص) = ق(∠ ب ص س) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = ٦٥°

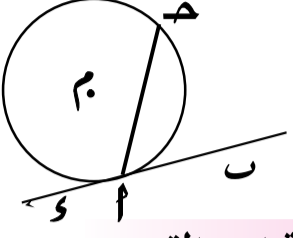
∵ أ س ، أ ع مماسان للدائرة ⟸ أ س = أ ع

∴ ق(∠ أ س ع) = ق(∠ أ ع س) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = ٥٥°

∴ ق(∠ ص س ع) = ١٨٠ − (٦٥ + ٥٥) = ٦٠°

الزاوية المماسية

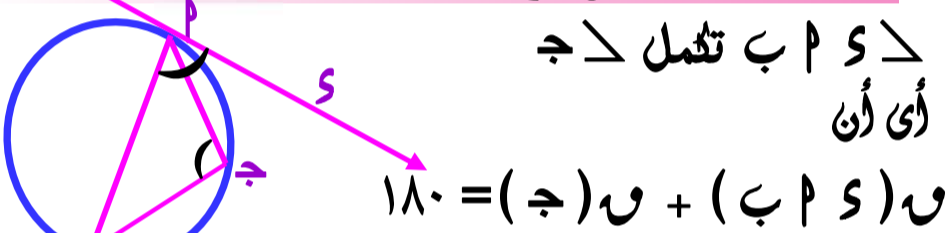
هى الزاوية المكونة من أتحاد شعاعين أحدهما مماس للدائرة والأخر يحتوى وتراً فى الدائرة يمر بنقطة التماس

∠ ب أ جـ زاوية مماسية تقابل (أ⌒جـ)

ملاحظات هامة

١) قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها

٢) قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطة المرسومة على وتر التماس

٣) قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

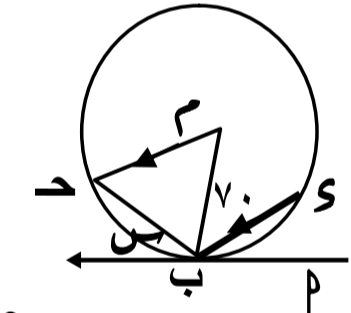
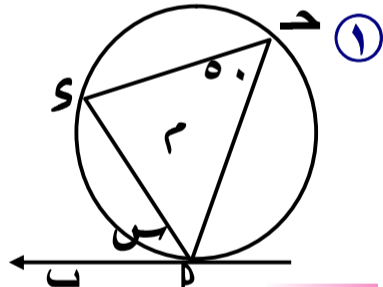
٤) **الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطية التى تقع فى نفس الجهة التى تقع فيها الزاوية المحيطية**

∠ ء أ ب تكمل ∠ جـ

أى أن

ق(∠ ء أ ب) + ق(∠ جـ) = ١٨٠

مثـــال أوجد قيمة س بالدرجات حيث أ ب مماس للدائرة م

(١) الحل س = ٥٠°

(٢) الحل ق(∠ م) = ٧٠° ، س = ٣٥°

عكس نظرية

إذا رسم من إحدى نقطتى النهاية لوتر فى دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتريساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الاخرى فإن هذا الشعاع يكون مماسا للدائرة

معنى النظرية

لأثبات ان ب ء مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ

نثبت ان ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ جـ ب)

(١) فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماسان للدائرة م عند ب ، جـ

ق(∠ب ء جـ) = ٧٠°

أوجد ق(∠أ)

البرهان

∵ $\overleftarrow{أب}$ مماس

∴ ق(∠أجـ ب)المماسية=ق(∠ب ء جـ)المحيطية = ٧٠°

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماسان ⟸ أب = أجـ

ق(∠أجـ ب) = ق(∠أب جـ) = ٧٠°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − (٧٠ + ٧٠) = ٤٠°

(٢) فى الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{أس}$ مماس للدائرة عند أ

أثبت أن $\overline{ءهـ}$ // $\overleftrightarrow{أس}$ ، الشكل ء ب جـ هـ رباعى دائرى

البرهان

∵ $\overleftrightarrow{أس}$ مماس

∴ ق(∠ س أب)المماسية = ق(∠جـ)المحيطية ①

∵ $\overleftrightarrow{أس}$ // $\overline{ءهـ}$

∴ق(∠س أب) = ق(∠أءهـ) بالتبادل ②

ق(∠أءهـ) = ق(∠جـ) من ١ ، ٢

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

∴ الشكل ء ب جـ هـ رباعى دائرى

(٣) فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماستان للدائرة

، ق(∠ب أ م)=٢٥°

أوجد ق(∠أجـ ب)

، ق(∠ب هـ جـ)

البرهان

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماستان للدائرة

∴ $\overrightarrow{أم}$ ينصف (∠ أ)

∴ (∠ أ)=٢٥×٢=٥٠ °

∴ أب = أجـ

$$∴ق(∠أب جـ)=ق(∠أجـ ب)=\frac{١٨٠-٥٠}{٢}=٦٥°$$

∴ق(∠ب هـ جـ)المحيطية=ق(∠أب جـ) المماسية

∴ق(∠ب هـ جـ)=٦٥°

(٤) فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ ، جـ ب = جـ ء

أثبت أن : ق(∠أب جـ)=ق(∠ء ب جـ)

وإذا كان ق(∠جـ هـ ء)=١١٠°

فأوجد ق(∠أ)

البرهان

∵$\overline{أب}$ مماس ⟸ ق(∠أ ب جـ)المماسية=ق(∠جـ ء ب)المحيطية

∵جـ ب=جـ ء ⟸ ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠جـ ء ب)

∴ ق(∠أب جـ) = ق(∠ ء ب جـ)

∵ الشكل ب جـ هـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠جـ ب ء) = ١٨٠ − ١١٠ = ٧٠°

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماسان ⟸ أب = أجـ

ق(∠أب جـ) = ق(∠أجـ ب) = ٧٠°

فى △ أب جـ

ق(∠أ) = ١٨٠ − (٧٠ + ٧٠) = ٤٠°

(٥) فى الشكل المقابل

أب = أ ء ، ق(∠أ) =٨٤°

ق(∠أب جـ) = ١٣٢°

أثبت أن :

$\overline{ب جـ}$ مماس لدائرة المارة بالنقط أ،ب،ء

البرهان

فى △ أب ء : ∵ أب = أ ء

$$∴ق(∠أب ء) = ق(∠أ ء ب)= \frac{١٨٠ - ٨٤}{٢} = ٤٨°$$

∴ ق(∠ ء ب جـ) = ١٣٢ − ٤٨ = ٨٤°

∴ ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠أ)

∴ $\overline{ب جـ}$ مماس للدائرة المارة بروؤس △ أب ء

(٦) فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة ن ، جـ ن ⊥ أ ب

أثبت أن : $\overline{أجـ}$ مماس لدائرة المارة بروؤس △ جـ هـ ء

البرهان

∵ أ ن = جـ ن = نق

∴ ق(∠ن أجـ)=ق(∠أجـ ن)=٤٥°

∵ق(⌒أ هـ)= ق(∠أ ن جـ)المركزية = ٩٠°

∵ق(∠أ هـ جـ)المحيطية= $\frac{١}{٢}$ ق(⌒أ هـ) = ٤٥°

∴ ق(∠أجـ ن) = ق(∠أ هـ جـ) = ٤٥°

∴ $\overline{أجـ}$ مماس لدائرة المارة بروؤس △ جـ هـ ء

تمارين ١٠

١ – أكمل ما يأتى :

① الدائرة الداخلة لمضلع هى الدائرة التى . . . . .

② قياس الزاوية المماسية = ... قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

③ قياس الزاوية المماسية = ... قياس القوس المحصور بين ضلعيها

④ قياس الزاوية المماسية = نصف قياس الزاوية . . . .

⑤ مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هي نقطة تقاطع . . . .

⑥ عدد المماسات المشتركة لدائرتان متباعدتان هو . . . .

⑦ القطعتان المماستان لدائرة من نقطة خارجها تكونان . . .

⑧ عدد المماسات المرسومة لدائرة من نقطة خارجها = ...

⑨ منصفات الزوايا الداخلة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة هي . . . .

⑩ في الشكل المقابل :

ق (∠ أ م ب) = ...

⑪ في الشكل المقابل :

$\overline{جـ ب}$ ، $\overline{جـ أ}$ مماسان للدائرة م ،

جـ ب = أ ب فإن ق (∠ جـ) = ...

---

(٢) فى الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ

ق (∠ أ) = ٤٠° ، $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$

① اثبت أن : ب جـ = ب ء

② أوجد : ق (∠ هـ ب ء)

---

(٣) فى الشكل المقابل

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ مماستان للدائرة

ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ هـ) = ١١٥°

اثبت أن :

$\overline{جـ ب}$ ينصف (∠ ء جـ أ)

، $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$

---

(٤) فى الشكل المقابل

دائرتان متقاطعتان فى ب ، جـ

$\overleftrightarrow{أ و}$ مماس للدائرة م

اثبت أن $\overleftrightarrow{أ و}$ // $\overline{ء هـ}$

---

(٥) فى الشكل المقابل

$\overline{أ ب}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ أثبت أن :

$\overleftarrow{أ ء}$ مماساً للدائرة المارة برؤوس △ أ ب جـ

---

(٦) فى الشكل المقابل

أ ب جـ △ فيه أ ب = أ جـ

، ق (∠ ب أ جـ) = ٦٦° ، ق (∠ س أ ب) = ٥٧°

أثبت أن : $\overleftarrow{أ س}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، جـ

---

(٧) فى الشكل المقابل

الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج فى أ ،

$\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس مشترك للدائرتان عند ب ، جـ ،

$\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس مشترك لهما عند أ

اثبت أن: ① ء منتصف ب جـ ② ق (∠ ب أ جـ) = ٩٠°

---

(٨) فى الشكل المقابل

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ مماستان للدائرة م

ق (∠ م ب جـ) = ٣٠°

إثبت أن

△ أ ب جـ متساوى الاضلاع

---

(٩) فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث مرسوم خارج دائرة تمس أضلاعه فى س ، ص ، ع

أ س = ٣ سم ،

ب ص = ٢ سم ، جـ ع = ٤ سم

أوجد محيط المثلث أ ب جـ

---

(١٠) فى الشكل المقابل

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ قطعتان مماستان

ق (∠ أ) = ٣٠°

، جـ ب = جـ هـ

(أ) إثبت أن : $\overline{ب هـ}$ // $\overline{أ جـ}$

(ب) أوجد ق (∠ جـ ء هـ)

(جـ) إثبت أن : $\overline{جـ هـ}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، جـ

---

(١١) فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م

، جـ و مماس للدائرة عند جـ

ء هـ ⊥ أ ب

أثبت أن :

① الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائرى

② و هـ = و جـ

ت/ ٠١٠٦٧٣٣٦٣١٥

أ/عبدالمقصود حنفى